

3. Türev.....	
3.1 Türev kavramı.....	001
3.2 Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi.....	003
Alıştırmalar 3–1.....	005
3.3 Bir fonksiyonun bir noktadaki soldan ve sağdan türevi.....	006
3.4 Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği ile türevlenebilirliği arasındaki ilişki.....	007
3.5 Bir Aralıkta Türevlenebilme	008
Alıştırmalar 3–2.....	009
3.6 Türev alma kuralları	011
3.6.1 Sabit Fonksiyonun Türevi.....	011
3.6.2 Polinom Fonksiyonun Türevi	011
3.6.3 Bir Sabitle Bir Fonksiyonun Çarpımının Türevi.....	012
3.6.4 İki Fonksiyonun Toplamının Türevi.....	012
3.6.5 İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi.....	012
3.6.6 İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi.....	014
Alıştırmalar 3–3.....	015
3.7 Bir ifadenin differensiyeli.....	016
3.8 Parçalı ve mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevi.....	017
3.8.1 Parçalı fonksiyonun bir noktadaki türevi	017
3.8.2 Mutlak değer fonksiyonunun bir noktadaki türevi	017
Alıştırmalar 3–4.....	019
3.9 Bir Fonksiyonun Grafiğinin Bir Noktasındaki Teğetin ve Normalinin Denklemi	020
Alıştırmalar 3–5	023
3.10 Doğrusal Hareketle Türevin İlişkisi.....	026
Alıştırmalar 3–6	028
3.11 Fonksiyonların türevi.....	029
3.11.1 Bileşke fonksiyonun türevi	029
3.11.2 Parametrik fonksiyonların türevi.....	032
Alıştırmalar 3–7	034
3.11.3 Kapalı fonksiyonların türevi	036
Alıştırmalar 3–8	037
3.11.4 Ters fonksiyonun türevi	039
Alıştırmalar 3–9	040
3.11.5 Rasyonel Üslü Fonksiyonların Türevi	042
3.11.6 Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	044
Alıştırmalar 3–10	046
3.11.7 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi.....	048
3.11.8 Logaritma Fonksiyonunun Türevi	050
Alıştırmalar 3–11	051
3.11.9 Üstel Fonksiyonunun Türevi	052
3.12 Logaritmik Türev Alma	054
Alıştırmalar 3–12	055
3.13 Yüksek Basamaktan Türevler	056
Alıştırmalar 3–13	058
3.14 Türevin Uygulamaları.....	059
3.14.1 Bir Fonksiyonun Artan ve Azalan Aralıklarıyla Türevin İlişkisi.....	059
Alıştırmalar 3–14	062
3.14.2 Yerel Ekstremum Noktalar	063
3.14.3 Ekstremum Noktalar ile Birinci Türevin İlişkisi	063
3.14.4 Ekstremum Noktalar ile İkinci Türevin İlişkisi	066
Alıştırmalar 3–15	067
3.14.5 Mutlak Ekstremum Noktalar	069
Alıştırmalar 3–16	073

İçindekiler

3.14.6	Bükeylik Kavramı ve Türevle İlişkisi.....	074
3.14.7	Bir Fonksiyonun Dönüm Noktası ve Türevle İlişkisi	075
	Alıştırmalar 3–17	078
3.14.8	Polinom Fonksiyonların Grafikleri.....	079
	Alıştırmalar 3–18	080
3.14.9	Düşey asimptot	081
3.14.10	Yatay asimptot	082
3.14.11	Eğik ve eğri asimptot	082
	Alıştırmalar 3–19	084
3.14.12	Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri.....	085
	Alıştırmalar 3–20	090
3.14.13	İrrasyonel Fonksiyonların Grafikleri.....	093
	Alıştırmalar 3–21	096
3.14.14	Maksimum Minimum Problemleri	097
	Alıştırmalar 3–22	103
3.14.15	Bir Polinomun Katlı Kökleri İle Türevleri Arasındaki İlişki	107
3.15	Limit Hesaplarında Belirsizlik Durumlarının Türev yardımı ile giderilmesi.....	108
3.15.1	L'Hospital (Lopital) Kuralı.....	108
3.15.2	0/0 belirsizliği	108
3.15.3	∞/∞ belirsizliği	109
3.15.4	$0\cdot\infty$ belirsizliği	109
3.15.5	$\infty-\infty$ belirsizliği	110
3.15.6	$0^0, 1^\infty, \infty^0$ Belirsizlikleri	110
	Alıştırmalar 3–23	111

TÜREV KONU KAVRAMA TESTLERİ

Test No

BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADAKİ TÜREVİ.....	01-01.....	119
BİR FONKSİYONUN SÜREKLİLİĞİ İLE TÜREVLENEBİLİRLİĞİ ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	02-02.....	121
TÜREV ALMA KURALLARI.....	03-04.....	123
BİR FONKSİYONUN BİR NOKTASINDAKİ TEĞETİNİN VE NORMALİNİN DENKLEMİ.....	05-07.....	127
TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI.....	08-09.....	133
BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ.....	10-10.....	137
PARAMETRİK VE KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ.....	11-11.....	139
BİR FONKSİYONUN ARTAN VE AZALAN ARALIKLARIYLA TÜREVİN İLİŞKİSİ.....	12-12.....	141
YEREL EKSTREMUM NOKTALAR.....	13-13.....	143
BİR FONKSİYONUN DÖNÜM NOKTASI VE TÜREVLE İLİŞKİSİ	14-14.....	145
POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ.....	15-16.....	147
DÜŞEY, EĞİK VE EĞRİ ASİMPOT.....	17-17.....	151
RASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ.....	18-20.....	153
MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ.....	21-24.....	159
BELİRSİZLİK DURUMLARININ TÜREV YARDIMI İLE GİDERİLMESİ	26-33.....	167
BİR POLİNOMUN KATLI KÖKLERİ İLE TÜREVLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	25-25.....	182
TÜREV - KONU TARAMA TESTLERİ.....	34-42.....	183

Konu anlatımlı, örnek çözümlü ve 1600 sorudan oluşan bu kitap

AYT ve ÖABT

sınavlarına hazırlanan yarışmacılara, 12.sınıf öğrencilerine ve
Matematik olimpiyatlarına hazırlanan herkese tavsiye olunur

3.11.6 Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri Trigonometrik Özdeşlikler ve Türev tanımı kullanılarak bulunur.

Örnek 3|68

Türev tanımını kullanarak $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm :

Bunu daha önce türev tanımında bir kez yapmıştık.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ tanımını kullanarak,}$$

$$f'(x) = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \cdot 1 = \cos x$$

O hâlde, $y = f(x) = \sin x$ ise $y' = f'(x) = \cos x$ bulunur.

Örnek 3|69

Türev tanımını kullanarak, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\sin x \text{ bulunur.}$$

O hâlde, $y = f(x) = \cos x$ ise, $y' = f'(x) = -\sin x$ bulunur.

Örnek 3|70

$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ ifadesine bir bölümün türevi uygulanırsa,}$$

$$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

O hâlde, $y = f(x) = \tan x$ ise $y' = f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ bulunur.

3.14.12. Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri

Rasyonel fonksiyonların grafiklerinin çiziminde, polinom fonksiyonların grafikleri için yaptıklarımıza ek olarak sadece asimptotları varsa bulunur.

Örnek $\langle 3 | 136 \rangle$

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm :

1. Fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$ tür.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ olduğundan grafik $y = 1$ doğrusuna yaklaşmaktadır. O halde $y = 1$ doğrusu

yatay asimptot, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-3} = \infty$, olduğundan $x = 3$ doğrusu düşey asimptottur.

3. Grafiğin koordinat eksenleri ile kesim noktaları; $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$, $y = 0 \Rightarrow x = -1$ olup y eksenini kestiği

nokta $(0, -\frac{1}{3})$ ve x eksenini kestiği nokta $(-1, 0)$ dir.

4. Birinci türevini inceleyelim:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-3) - 1 \cdot (x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2} \Rightarrow \text{birinci türevin kökü yoktur.}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ için $f'(x) < 0$ olduğundan grafik her yerde azalandır ve fonksiyonun yerel maksimum ya da yerel minimum noktası yoktur.

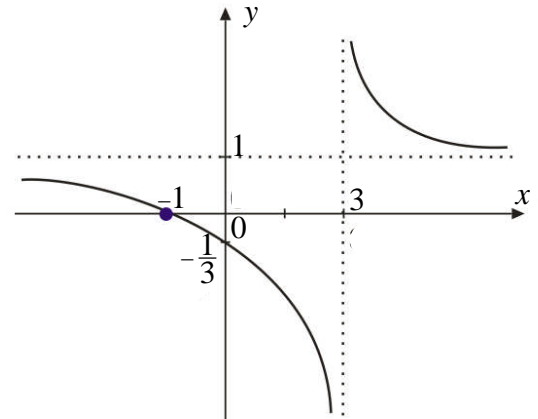
5. İkinci türevini inceleyelim.

$$f''(x) = \frac{8}{(x-3)^3} \text{ olduğundan ikinci türevi sıfır yapan değer yoktur.}$$

6. $f(-x) = \frac{-x+1}{-x-3} = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ ve $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan fonksiyon tek veya çift değildir.

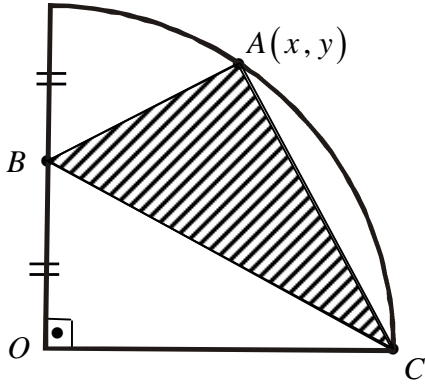
7. Fonksiyonun değişim tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$						
$f'(x)$	-	-	-	-	-						
$f''(x)$	-	-	-	-	+						
$f(x)$	1	\searrow	0	\searrow	$-\frac{1}{3}$	\searrow	$-\infty$	\parallel	∞	\searrow	1



Tablodaki bilgileri analitik düzleme aktarırsak yandaki grafik bulunur.

1•



Şekildeki, O merkezli çeyrek çemberde ABC üçgeninin alanının maksimum değeri için $\frac{y}{x}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\sqrt{2}$

2•

$\left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = e^t \end{array} \right\}$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{e^t}{\cos^3 t}$ B) $\frac{(\cos t + \sin t)}{\cos^3 t}$ C) $\frac{e^t \cdot \sin t}{\cos^3 t}$
D) $\frac{e^t (\cos t + \sin t)}{\cos^3 t}$ E) $\frac{e^t (\cos t - \sin t)}{\cos^3 t}$

3•

$f(x) = -x^2 + |2x + m|$ fonksiyonu veriliyor.

$f'(x) = 12$ denklemini sağlayan, farklı iki x değeri olduğuna göre, m tamsayısı en çok kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13

4•

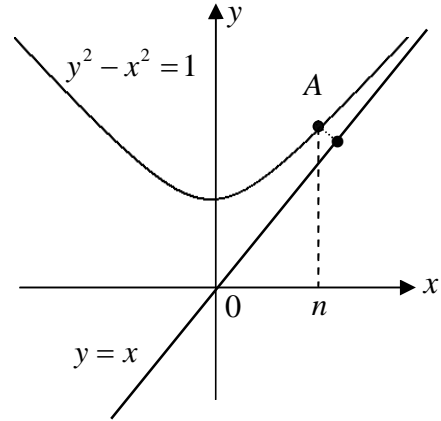
$f(x)$ fonksiyonu 3.dereceden olup $x = -1$ noktasında dönüm(büküm) noktası vardır.

$f'(1) + f'(2) = 78$ ise,

$f(1) + f(2)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) Hepsi

5•



Şekildeki, $y^2 - x^2 = 1$ eğrisinin üzerinde apsisi n olan bir A noktasının $y = x$ doğrusuna olan uzaklığı d_n olduğuna göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n)$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) 2

6•

$\left. \begin{array}{l} y = 2t^3 + t^2 - 7 \\ x = t^2 + 2t + 4 \end{array} \right\}$ olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $t = 1$ için değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

7•

$f(n) = 1.2.3 \dots (n-1)(x-n)$ ve

$\frac{d}{dx} [f(3) \cdot f(4)] = 36$ ise x değeri kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13

8•

$\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{1}{x-e} - \frac{1}{\ln x - 1} \right)$

İfadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\infty$ B) $\frac{1}{e}$ C) e D) $2e$ E) yoktur

D	D	E	E	-	B	D	B	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---

9•

Bir çiftçi elindeki 400 kasa elmayı satmak için bekletmektedir. Elmaları beklettiği her gün 20 kasa daha elma toplamaktadır. Kasa başı karı 60TL olan elmalar bekledikleri her gün 2TL değer kaybetmektedir. Buna göre, çiftçi elmaları kaç gün bekletirse karı en fazla olur?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10•

Taban yarıçapı r olan bir dik silindir, hacmi en küçük olan bir dik koninin içine yerleştirilmiştir. Koninin ve silindirin tabanları üst üstedir. Koninin taban yarıçapı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{5}r$ B) $\frac{r}{3}$ C) $\frac{2r}{3}$ D) $\frac{3r}{2}$ E) $3r$

11•

$y = 4x^2 - 1$ eğrisine $(1, -1)$ noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarının ordinatları toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 14 E) 15

12•

$f : [-4, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı

$f(x) = -x^2 - 2x + 6$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeri ile mutlak minimum değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 7 D) 8 E) 9

13•

$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$ fonksiyonunun 1.türev

fonksiyonu $f'(x)$ olduğuna göre,

$f'(x) \cdot (1 + \sin 2x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 1 C) $\cos^2 2x$ D) $\sin x$ E) $\cos x$

14•

$f(ax+1) = 2ax^3 + 3x^2 - 3ax + 7$ ise $f'(0)$ değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 1 D) 3 E) 4

15•

$f(x) = (\ln x)^x$ ise $f'(e)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) e E) $\frac{2}{e}$

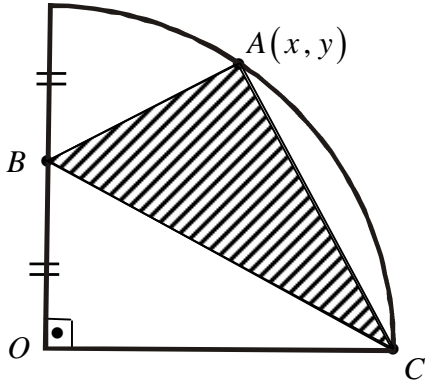
16•

$y = x^2$ parabolüne $x = \frac{5}{2}$ ve $x = a$ noktalarından

çizilen teğetler arasındaki açı 45° olduğuna göre, a nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

1•



Şekildeki, O merkezli çeyrek çemberde ABC üçgeninin alanının maksimum değeri için $\frac{y}{x}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\sqrt{2}$

2•

$\left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = e^t \end{array} \right\}$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{e^t}{\cos^3 t}$ B) $\frac{(\cos t + \sin t)}{\cos^3 t}$ C) $\frac{e^t \cdot \sin t}{\cos^3 t}$
D) $\frac{e^t (\cos t + \sin t)}{\cos^3 t}$ E) $\frac{e^t (\cos t - \sin t)}{\cos^3 t}$

3•

$f(x) = -x^2 + |2x + m|$ fonksiyonu veriliyor.

$f'(x) = 12$ denklemini sağlayan, farklı iki x değeri olduğuna göre, m tamsayısı en çok kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13

4•

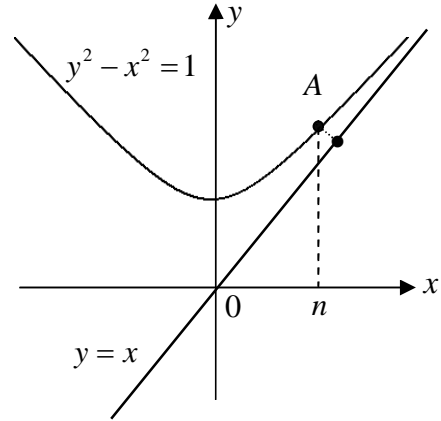
$f(x)$ fonksiyonu 3.dereceden olup $x = -1$ noktasında dönüm(büküm) noktası vardır.

$f'(1) + f'(2) = 78$ ise,

$f(1) + f(2)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) Hepsi

5•



Şekildeki, $y^2 - x^2 = 1$ eğrisinin üzerinde apsisi n olan bir A noktasının $y = x$ doğrusuna olan uzaklığı d_n olduğuna göre, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n)$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) 2

6•

$\left. \begin{array}{l} y = 2t^3 + t^2 - 7 \\ x = t^2 + 2t + 4 \end{array} \right\}$ olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin $t = 1$ için değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

7•

$f(n) = 1.2.3 \dots (n-1)(x-n)$ ve

$\frac{d}{dx} [f(3) \cdot f(4)] = 36$ ise x değeri kaçtır?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13

8•

$\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{1}{x-e} - \frac{1}{\ln x - 1} \right)$

İfadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\infty$ B) $\frac{1}{e}$ C) e D) $2e$ E) yoktur

D	D	E	E	-	B	D	B	A
---	---	---	---	---	---	---	---	---

9•

Bir çiftçi elindeki 400 kasa elmayı satmak için bekletmektedir. Elmaları beklettiği her gün 20 kasa daha elma toplamaktadır. Kasa başı karı 60TL olan elmalar bekledikleri her gün 2TL değer kaybetmektedir. Buna göre, çiftçi elmaları kaç gün bekletirse karı en fazla olur?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10•

Taban yarıçapı r olan bir dik silindir, hacmi en küçük olan bir dik koninin içine yerleştirilmiştir. Koninin ve silindirin tabanları üst üstedir. Koninin taban yarıçapı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{5}r$ B) $\frac{r}{3}$ C) $\frac{2r}{3}$ D) $\frac{3r}{2}$ E) $3r$

11•

$y = 4x^2 - 1$ eğrisine $(1, -1)$ noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarının ordinatları toplamı kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 14 E) 15

12•

$f : [-4, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı

$f(x) = -x^2 - 2x + 6$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeri ile mutlak minimum değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 7 D) 8 E) 9

13•

$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$ fonksiyonunun 1.türev

fonksiyonu $f'(x)$ olduğuna göre,

$f'(x) \cdot (1 + \sin 2x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 1 C) $\cos^2 2x$ D) $\sin x$ E) $\cos x$

14•

$f(ax+1) = 2ax^3 + 3x^2 - 3ax + 7$ ise $f'(0)$ değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 1 D) 3 E) 4

15•

$f(x) = (\ln x)^x$ ise $f'(e)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) e E) $\frac{2}{e}$

16•

$y = x^2$ parabolüne $x = \frac{5}{2}$ ve $x = a$ noktalarından

çizilen teğetler arasındaki açı 45° olduğuna göre, a nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3