

4. İntegral.....		
4.1 Belirsiz İntegral		001
4.1.1 Bir fonksiyonun belirsiz integrali..		001
Alıştırmalar 4-1		002
4.1.2 Belirsiz İntegralin Özellikleri.....		003
4.1.3 Temel integral alma kuralları		004
Alıştırmalar 4-2		008
4.1.4 İntegral alma yöntemleri.....		009
4.1.4.1 Değişken değiştirme yöntemi ile integral alma		011
Alıştırmalar 4-3		012
4.1.4.2 Kısmi integral yöntemi ile integral alma.....		017
Alıştırmalar 4-4		018
4.1.4.3 Basit kesirlere ayırma yöntemi ile integral alma		019
Alıştırmalar 4-5		022
4.1.4.4 Trigonometrik Özdeşliklerden Faydalanarak İntegral alma.....		024
Alıştırmalar 4-6		030
4.2 Belirli İntegral		034
4.2.1 Bir kapalı aralığın parçalanması		034
4.2.2 Alt toplam,Üst toplam ve Riemann toplamı		035
4.2.3 Belirli İntegral		039
4.2.4 İntegral Hesabının 1. Temel Teoremi.....		042
4.2.5 İntegral Hesabının 2. Temel Teoremi.....		043
Alıştırmalar 4-7		046
4.2.6 Belirli integralin özellikleri.....		047
Alıştırmalar 4-8		055
4.3 Belirli İntegralin Uygulamaları		056
4.3.1 İntegral ile alan hesabı		056
4.3.2 İki Eğri Arasında Kalan Alan		059
Alıştırmalar 4-9		069
4.3.2 İntegral ile hacim hesabı		073
Alıştırmalar 4-10		077
4.3.3 İntegral yardımıyla doğrusal hareket problemlerinin çözümü		079
Alıştırmalar 4-11		080
İNTEGRAL KONU KAVRAMA TESTLERİ	<u>Test No</u>	
BELİRSİZ İNTEGRAL	01-03.....	081
BELİRLİ İNTEGRAL	04-06.....	087
İNTEGRAL İLE ALAN HESABI	07-09.....	093
İNTEGRAL İLE HACİM HESABI	10-10.....	099
İNTEGRAL YARDIMI İLE LİMİT VE HAREKET	11-11.....	101
İNTEGRAL - KONU TARAMA TESTLERİ	12-22.....	103

Konu anlatımlı, örnek çözümlü ve 1280 sorudan oluşan bu kitap
AYT ve ÖABT
sınavlarına hazırlanan yarışmacılara, 12.sınıf öğrencilerine ve
Matematik olimpiyatlarına hazırlanan herkese tavsiye olunur

4.3.2 İntegral ile Hacim Hesabı

Teorem :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ ve Ox eksenini ile sınırlanan kapalı bölgenin, Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi; $V = \pi \int_a^b |f(x)|^2 dx = \left| \pi \int_a^b y^2 dx \right|$ tir.

İspat:

$[a, b]$ aralığını n tane alt aralığa ayıralım. Düzgün bölüntü yaparsak, alt aralıkların uzunlukları eşit olur:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

$[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığına ait bir t_k noktası seçelim. Böylece, tabanı Δx_k , yüksekliği $f(t_k)$ olan bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgen Ox eksenini etrafında döndürülürse; yarıçapı $f(t_k)$, yüksekliği Δx_k olan bir silindir meydana gelir. Bu silindirin hacmi:

$$V_k = \pi [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k \text{ dir.}$$

Böylece, $[a, b]$ aralığına ait n tane dikdörtgenin Ox eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen n tane silindirin hacimleri toplamı, $\sum_{k=1}^n \pi [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$ tir. Bu toplam, dönel cismin hacminin yaklaşık değeridir.

P bölüntüsü ne kadar ince seçilirse, silindirlerin hacimleri toplamı, dönel cismin hacmine o kadar yaklaşır. O hâlde, $n \rightarrow \infty$ için limit durumunda bu toplam, dönel cismin hacmine daha yakın değer alacağından,

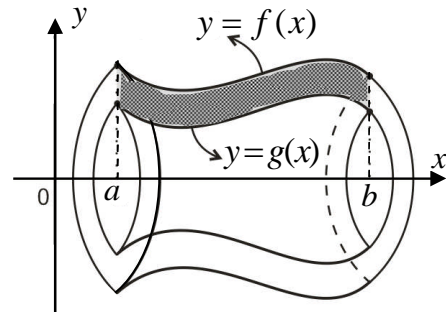
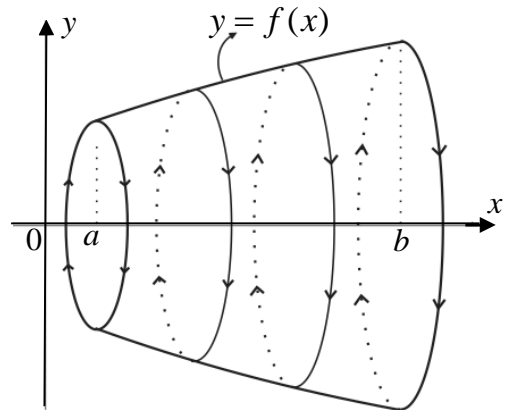
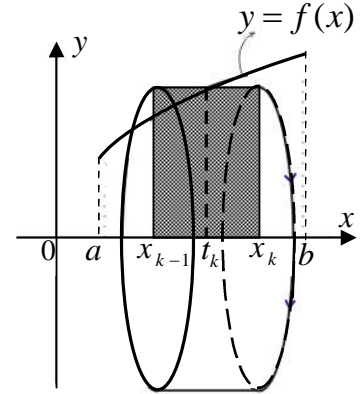
$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa;

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ olur.}$$

Sonuç :1

$[a, b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon, $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ olsun. $x \in [a, b]$ için, $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ise; $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$, ve $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx \text{ tir.}$$



Şekilde görüldüğü gibi oluşan cismin hacmi dıştaki dönel cisim ile içteki dönel cismin hacimleri farkına eşittir.

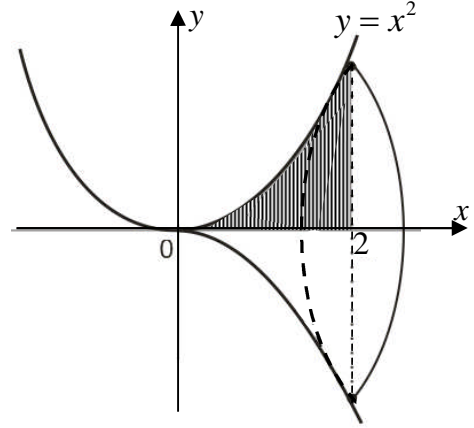
Örnek (4|120)

$f(x) = x^2$ eğrisi, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ve Ox eksenini tarafından sınırlanan kapalı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

Elde edilen cisim, yandaki şekilde görülmektedir.

$$V = \pi \int_0^2 |f(x)|^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \text{ olur.}$$



Örnek (4|121)

$f(x) = x^3$ eğrisi $x = 0$, $x = 2$, $y = 8$ doğruları arasında kalan kapalı bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

Elde edilen cisim yandaki şekilde görülmektedir.

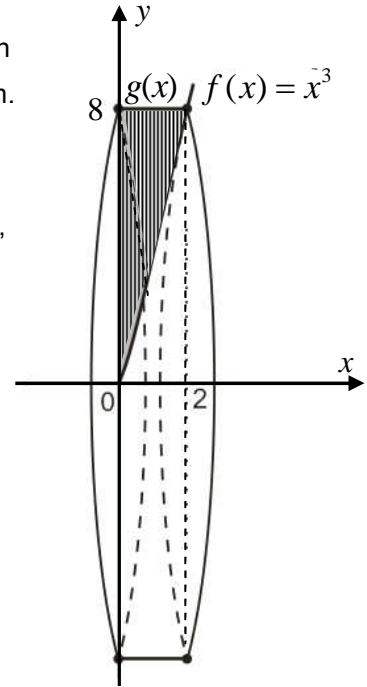
Oluşan hacim, $g(x) = 8$ doğrusunun dönmesiyle oluşan silindirin hacminden,

$f(x) = x^3$ eğrisinin dönmesiyle oluşan cismin hacminin farkına eşittir.

Önce, bu doğru ile eğrinin kesim noktasını bulalım:

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ dir. O hâlde, dönel cismin hacmi;}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [g^2(x) - f^2(x)] dx = \pi \int_0^2 (64 - x^6) dx \\ &= \pi \left(64x - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^2 = \pi \left(64 \cdot 2 - \frac{1}{7} 2^7 \right) - 0 = \frac{768\pi}{7} \text{ birimküp bulunur.} \end{aligned}$$



Örnek (4|122)

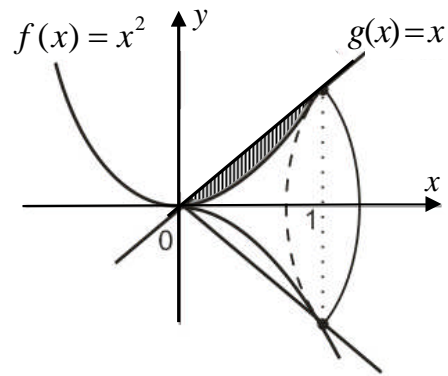
$f(x) = x^2$ parabolü ve $g(x) = x$ doğrusu arasında kalan düzlemsel bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

Önce $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının belirttiği eğrilerinin kesim noktalarını bulalım.

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 1$ bulunur. Oluşan cismin hacmi, doğrunun dönmesi ile oluşan hacimden, parabolün dönmesi ile oluşan hacmin çıkartılması ile bulunur.

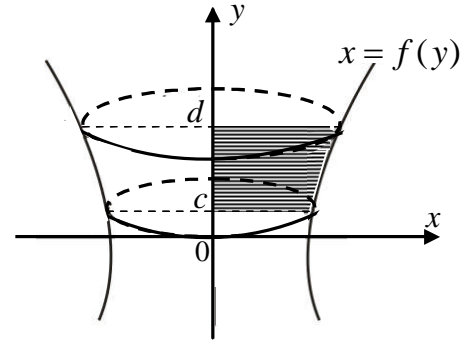
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [g^2(x) - f^2(x)] dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Sonuç :2

$x = f(y)$ fonksiyonunun eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy eksenini ile sınırlanan düzlemsel bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_c^d |f(y)|^2 dy = \left| \pi \int_c^d x^2 dy \right| \text{ dir.}$$

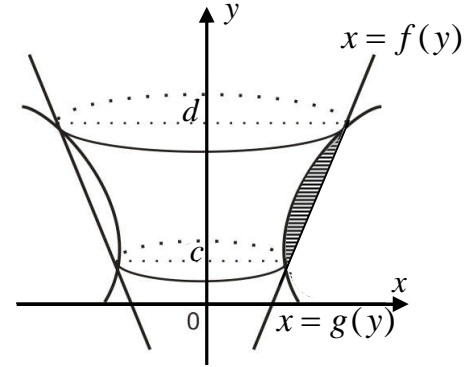


Sonuç :3

$y \in [c, d]$ için $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ise;

$x = f(y)$ ve $x = g(y)$ eğrileri ile $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasında kalan bölgenin y eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)] dy \text{ dir.}$$



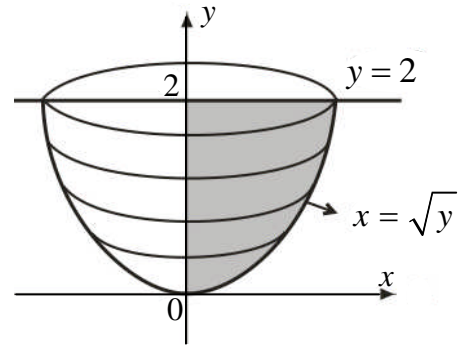
Örnek <4|123>

$y = x^2$ parabolü, $x = 0$ ve $y = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ dir. Oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_0^2 |\sqrt{y}|^2 dy = \left| \pi \int_0^2 y dy \right| = \left| \pi \int_0^2 y dy \right| = \left. \frac{\pi}{2} y^2 \right|_0^2 = 2\pi \text{ bulunur.}$$



Örnek <4|124>

$x = y^2$ eğrisi ve $y = x^2$ eğrisi arasında kalan düzlemsel bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

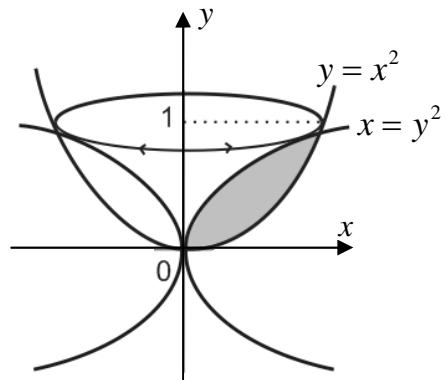
Önce, bu iki eğrinin kesim noktalarını bulalım.

$$y = x^2 \Rightarrow y = (y^2)^2 = y^4 \Rightarrow y^4 - y = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \text{ ve } y_2 = 1 \text{ bulunur.}$$

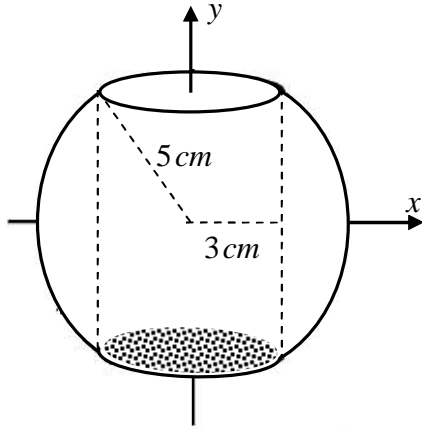
O hâlde, oluşan dönel cismin hacmi; $y \in [0,1]$ da $y = x^2$ parabolünün oluşturduğu hacimden, $x = y^2$ parabolünün oluşturduğu hacim çıkartılarak bulunur.

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - (y^2)^2] dy = \pi \int_0^1 (y - y^4) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

bulunur.



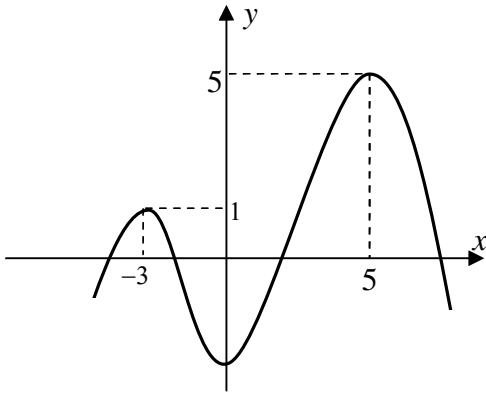
1•



Yarıçapı 5 cm olan bir küreden, yarıçapı 3 cm olan silindirik bir oyuk açılacak biçimde bir cisim çıkarılmaktadır. Çıkarılan cismin hacmi kaç br^3 tür?

- A) $\frac{7\pi}{3}$ B) $\frac{82\pi}{3}$ C) $\frac{125\pi}{3}$ D) $\frac{128\pi}{3}$ E) $\frac{244\pi}{3}$

2•



Yukarıdaki şekle göre, $\int_{-3}^5 (f'(x) + f''(x)) dx$

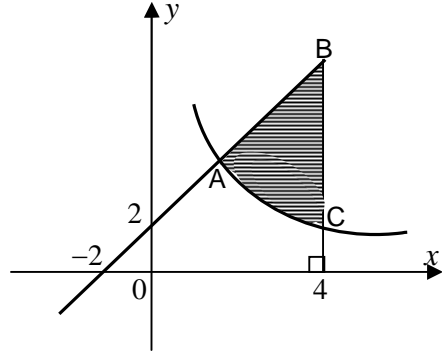
integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?
A) -9 B) -1 C) 0 D) 4 E) 9

3•

$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} \cdot dx$ integralinin eşiti nedir?

- A) $\frac{4 \cdot \sqrt{(\sqrt{x}-1)^3}}{3} + C$ B) $\frac{4 \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}}{5} + C$
C) $\frac{4 \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}}{3} + C$ D) $\frac{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}}{3} + C$
E) $\frac{4 \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1)^5}}{3} + C$

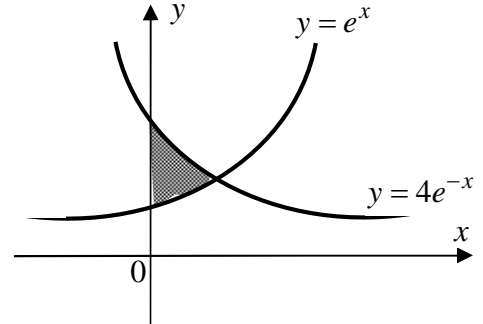
4•



Yukarıdaki şekilde $y = \frac{8}{x}$ eğrisinin bir kısmıyla $x = 4$ ve $y = x + 2$ doğrularının grafiği verilmiştir. Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) $9 - 8 \ln 2$ B) $9 + 8 \ln 2$ C) $8 - 9 \ln 2$
D) $8 + 9 \ln 2$ E) $10 - 8 \ln 2$

5•



Yanda verilen şekildeki taralı bölgenin Ox ekseninde 360° döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{2}$ D) $\frac{8\pi}{3}$ E) $\frac{9\pi}{2}$

6•

$A(1,3)$, $B(3,1)$ ve $C(3,3)$ noktalarından oluşan bir üçgenel bölgenin x ekseninde 360° döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi kaç birim küptür?

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{2}$ D) $\frac{28\pi}{3}$ E) $\frac{19\pi}{2}$

7•

$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 1} dx$ integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

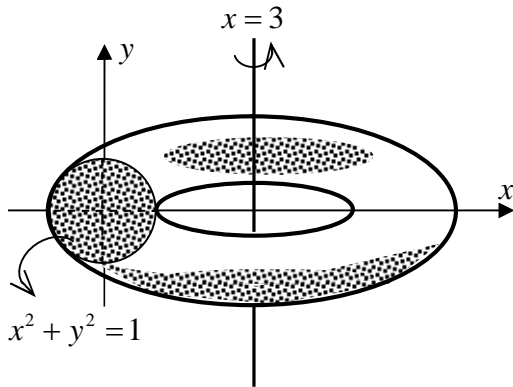
- A) $\frac{1}{5} \ln \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{3}} + C$
 B) $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} + C$
 C) $5 \ln \frac{2x+3-\sqrt{2}}{2x+3+\sqrt{3}} + C$
 D) $\frac{1}{2} \arctan(x + \sqrt{2}) + C$
 E) $-\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} + C$

8•

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \right)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) ∞

9•



$x^2 + y^2 = 1$ denklemiyle verilen merkezli çemberin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan (simit imsi) cismin hacmi kaç br^3 tür?

- A) $6\pi^2$ B) $12\pi^2$ C) $16\pi^2$ D) $24\pi^2$ E) $32\pi^2$

10•

$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \cdot dx$ integralinin eşiti nedir?

- A) $-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$
 B) $-\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$
 C) $-\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$
 D) $\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$
 E) $\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

11•

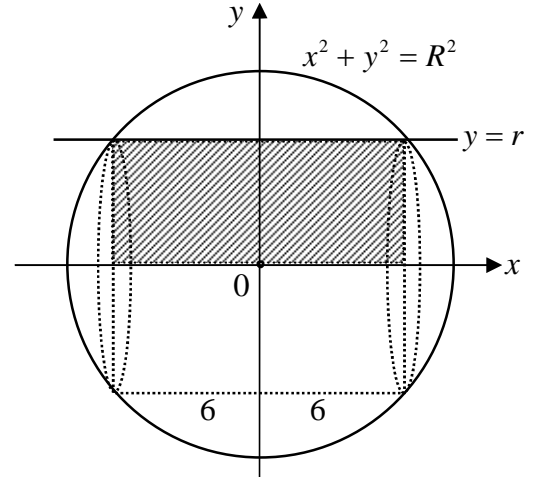
$p \geq 2$ olmak üzere

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{pn} \right]$ ifadesi

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $-\ln p$ B) 0 C) 1 D) $\ln p$ E) ∞

12•



Yarıçapı R cm olan bir küreden, yüksekliği 12 cm olan silindirik bir oyuk açılacak biçimde bir cisim çıkarılmaktadır. Geriye kalan cismin hacmi kaç cm^3 tür?

- A) 72π B) 117π C) 180π D) 288π E) 300π

B	B	A	-	A	D	D
---	---	---	---	---	---	---