Cebir

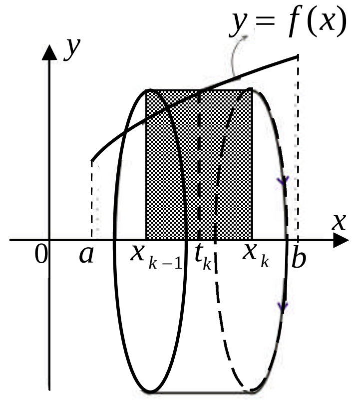
Konu anlatımlı, örnek çözümlü ve 1280 sorudan oluşan bu kitap
AYT ve **ÖABT**
sınavlarına hazırlanan yarışmacılara, 12.sınıf öğrencilerine ve
Matematik olimpiyatlarına hazırlanan herkese tavsiye olunur

4.3.2 İntegral ile Hacim Hesabı

Teorem :

$f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$, $x=b$ ve Ox ekseni ile sınırlanan kapalı bölgenin, Ox ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi; $V=\pi\int_a^b |f(x)|^2\,dx=\left|\pi\int_a^b y^2dx\right|$ tir.

İspat:

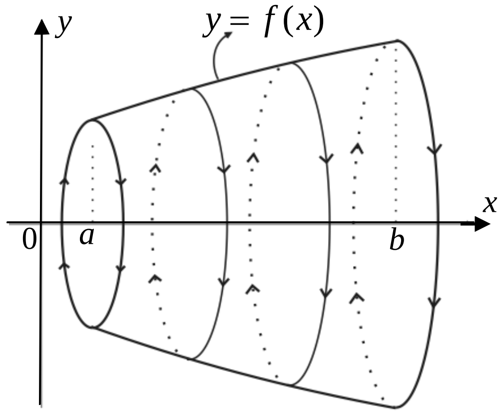


$[a,b]$ aralığını n tane alt aralığa ayıralım. Düzgün bölüntü yaparsak, alt aralıkların uzunlukları eşit olur:

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=...=\Delta x_n=\frac{b-a}{n}$$

$[x_{k-1},x_k]$ alt aralığına ait bir t_k noktası seçelim. Böylece, tabanı Δx_k , yüksekliği $f(t_k)$ olan bir dikdörtgen oluşur. Bu dikdörtgen Ox ekseni etrafında döndürülürse; yarıçapı $f(t_k)$, yüksekliği Δx_k olan bir silindir meydana gelir. Bu silindirin hacmi:

$V_k=\pi\left[f(t_k)\right]^2.\Delta x_k$ dir.



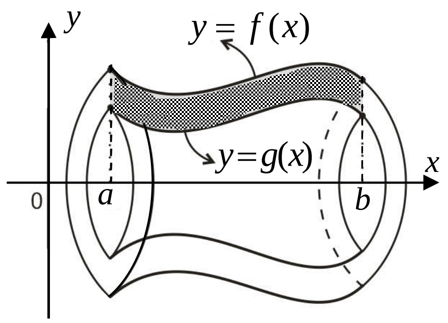
Böylece, $[a,b]$ aralığına ait n tane dikdörtgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen n tane silindirin hacimleri toplamı, $\sum_{k=1}^{n}\pi\left[f(t_k)\right]^2.\Delta x_k$ tir. Bu toplam, dönel cismin hacminin yaklaşık değeridir.

P bölüntüsü ne kadar ince seçilirse, silindirlerin hacimleri toplamı, dönel cismin hacmine o kadar yaklaşır. O hâlde, $n\rightarrow\infty$ için limit durumunda bu toplam, dönel cismin hacmine daha yakın değer alacağından,

$n\rightarrow\infty$ için limit alınırsa;

$$V=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\left[f(t_k)\right]^2.\Delta x_k=\int_a^b\pi\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_a^b y^2dx \text{ olur.}$$

Sonuç :1



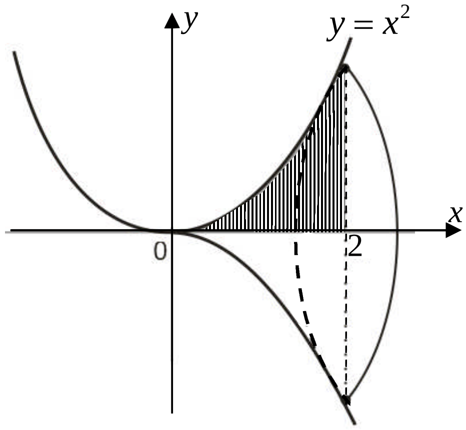
$[a,b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon, $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ olsun. $x\in[a,b]$ için, $f(x)\geq g(x)\geq 0$ ise; $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ eğrileri, , $x=a$, ve $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx \text{ tir.}$$

Şekilde görüldüğü gibi oluşan cismin hacmi dıştaki dönel cisim ile içteki dönel cismin hacimleri farkına eşittir.

∯rnek ⟨4|120⟩

$f(x)=x^2$ eğrisi, $x=0$, $x=2$ doğruları ve Ox ekseni tarafından sınırlanan kapalı bölgenin Ox ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.



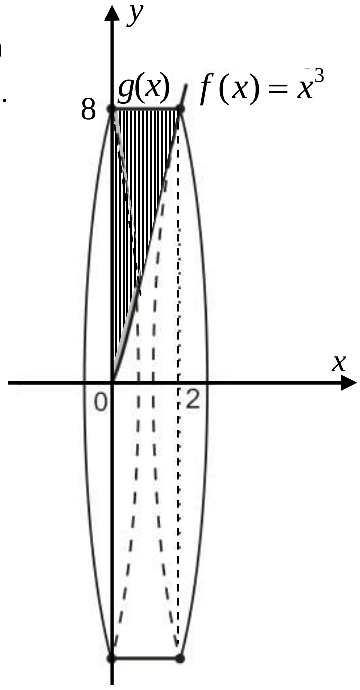
Çözüm :

Elde edilen cisim, yandaki şekilde görülmektedir.

$$V=\pi\int_0^2 |f(x)|^2\,dx=\left|\pi\int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx\right|=\left|\pi\int_0^2 x^4 dx\right|=\frac{\pi x^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{32\pi}{5}$$ olur.

∯rnek ⟨4|121⟩

$f(x)=x^3$ eğrisi $x=0$, $x=2$, $y=8$ doğruları arasında kalan kapalı bölgenin Ox ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.



Çözüm :

Elde edilen cisim yandaki şekilde görülmektedir.

Oluşan hacim, $g(x)=8$ doğrusunun dönmesiyle oluşan silindirin hacminden, $f(x)=x^3$ eğrisinin dönmesiyle oluşan cismin hacminin farkına eşittir.

Önce, bu doğru ile eğrinin kesim noktasını bulalım:

$x^3=8 \Rightarrow x=2$ dir. O hâlde, dönel cismin hacmi;

$$V=\pi\int_0^2\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx=\pi\int_0^2\left(64-x^6\right)dx$$

$$=\pi\left(64x-\frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^2=\pi\left(64.2-\frac{1}{7}2^7\right)-0=\frac{768\pi}{7}$$ birimküp bulunur.

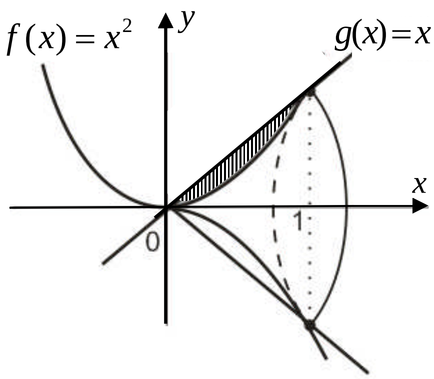
∯rnek ⟨4|122⟩

$f(x)=x^2$ parabolü ve $g(x)=x$ doğrusu arasında kalan düzlemsel bölgenin Ox ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

Önce $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının belirttiği eğrilerinin kesim noktalarını bulalım.

$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x=0$ veya $x=1$ bulunur. Oluşan cismin hacmi, doğrunun dönmesi ile oluşan hacimden, parabolün dönmesi ile oluşan hacmin çıkartılması ile bulunur.



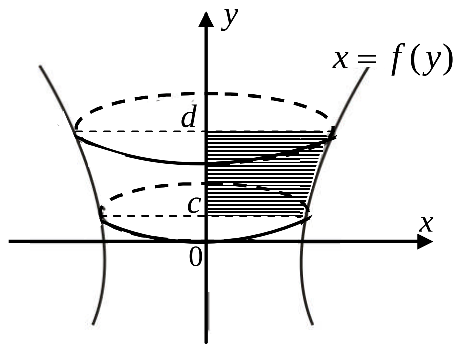
$$V=\pi\int_0^1\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx=\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\pi}{15}$$ bulunur.

Sonuç :2

$x = f(y)$ fonksiyonunun eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy ekseni ile sınırlanan düzlemsel bölgenin Oy ekseni etrafında 360^{o} döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_{c}^{d} \left| f(y) \right|^{2} dy = \left| \pi \int_{c}^{d} x^{2} dy \right| \text{ dir.}$$

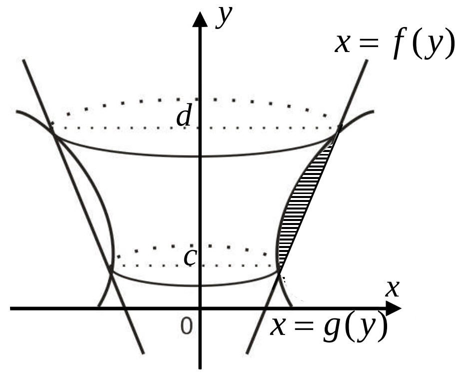


Sonuç :3

$y \in [c, d]$ için $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ise;

$x = f(y)$ ve $x = g(y)$ eğrileri ile $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında 360^{o} döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_{c}^{d} \left[f^{2}(y) - g^{2}(y) \right] dy \text{ dir.}$$



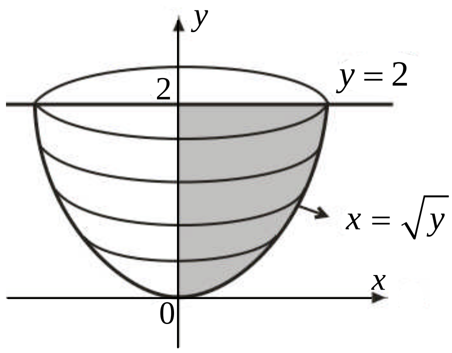
Örnek ⟨4|123⟩

$y = x^{2}$ parabolü, $x = 0$ ve $y = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy ekseni etrafında 360^{o} döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

$y = x^{2} \Rightarrow x = \sqrt{y}$ dır. Oluşan dönel cismin hacmi;

$$V = \pi \int_{0}^{2} \left| \sqrt{y} \right|^{2} dy = \left| \pi \int_{0}^{2} y dy \right| = \left| \pi \int_{0}^{2} y dy \right| = \frac{\pi}{2} y^{2} \bigg|_{0}^{2} = 2\pi \text{ bulunur.}$$



Örnek ⟨4|124⟩

$x = y^{2}$ eğrisi ve $y = x^{2}$ eğrisi arasında kalan düzlemsel bölgenin Oy ekseni etrafında 360^{o} döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulalım.

Çözüm :

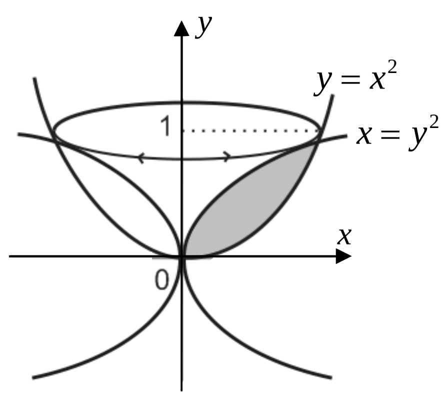
Önce, bu iki eğrinin kesim noktalarını bulalım.

$y = x^{2} \Rightarrow y = \left(y^{2}\right)^{2} = y^{4} \Rightarrow y^{4} - y = 0 \Rightarrow y_{1} = 0$ ve $y_{2} = 1$ bulunur.

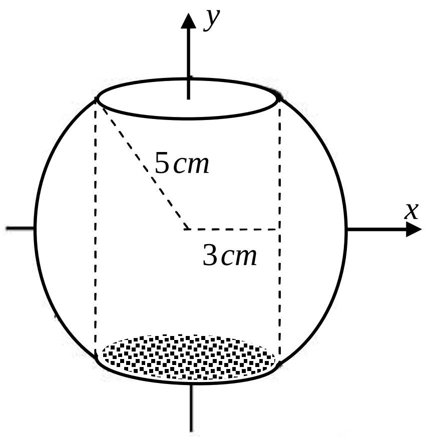
O hâlde, oluşan dönel cismin hacmi; $y \in [0,1]$ da $y = x^{2}$ parabolünün oluşturduğu hacimden, $x = y^{2}$ parabolünün oluşturduğu hacim çıkartılarak bulunur.

$$V = \pi \int_{0}^{1} \left[\left(\sqrt{y}\right)^{2} - \left(y^{2}\right)^{2} \right] dy = \pi \int_{0}^{1} \left(y - y^{4}\right) dy = \pi \left(\frac{y^{2}}{2} - \frac{y5}{5} \right) \bigg|_{0}^{1} = \frac{3\pi}{10}$$

bulunur.



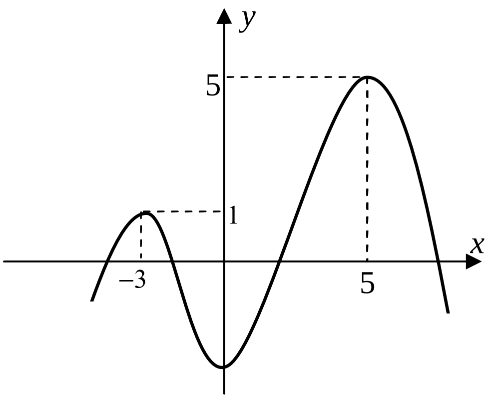
1•



Yarıçapı 5 cm olan bir küreden, yarıçapı 3 cm olan silindirik bir oyuk açılacak biçimde bir cisim çıkarılmaktadır. Çıkarılan cismin hacmi kaç br^3 tür?

A) $\frac{7\pi}{3}$ B) $\frac{82\pi}{3}$ C) $\frac{125\pi}{3}$ D) $\frac{128\pi}{3}$ E) $\frac{244\pi}{3}$

2•



Yukarıdaki şekle göre, $\int_{-3}^{5}\left(f'(x)+f''(x)\right)dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -9 B) -1 C) 0 D) 4 E) 9

3•

$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\cdot dx$ integralinin eşiti nedir?

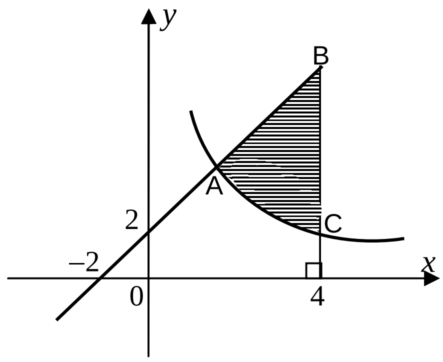
A) $\frac{4\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}}{3}+C$ B) $\frac{4\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}}{5}+C$

C) $\frac{4\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}}{3}+C$ D) $\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}}{3}+C$

E) $\frac{4\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^5}}{3}+C$

Ahmet YAZICI

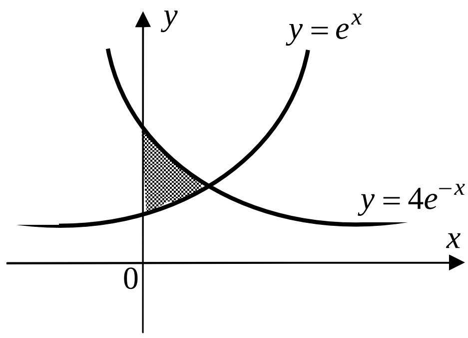
4•



Yukarıdaki şekilde $y=\frac{8}{x}$ eğrisinin bir kısmıyla $x=4$ ve $y=x+2$ doğrularının grafiği verilmiştir. Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $9-8\ln 2$ B) $9+8\ln 2$ C) $8-9\ln 2$ D) $8+9\ln 2$ E) $10-8\ln 2$

5•



Yanda verilen şekildeki taralı bölgenin Ox ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{2}$ D) $\frac{8\pi}{3}$ E) $\frac{9\pi}{2}$

6•

$A(1,3)$, $B(3,1)$ ve $C(3,3)$ noktalarından oluşan bir üçgensel bölgenin x ekseni etrafında 360^o döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi kaç birim küptür?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{2}$ D) $\frac{28\pi}{3}$ E) $\frac{19\pi}{2}$

E	D	C	–	E	E	D

7•

$\int \frac{1}{x^2+3x+1}dx$ integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{5}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{3}}+C$

B) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}+C$

C) $5\ln\frac{2x+3-\sqrt{2}}{2x+3+\sqrt{3}}+C$

D) $\frac{1}{2}\arctan\left(x+\sqrt{2}\right)+C$

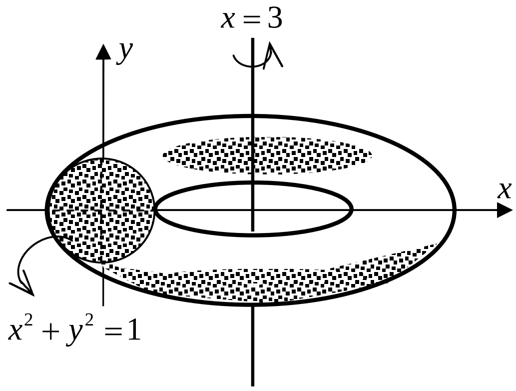
E) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}+C$

8•

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+...+\sqrt[n]{n}}{n}\right)$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) ∞

9•



$x^2+y^2=1$ denklemiyle verilen merkezil çemberin $x=3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan (simit imsi) cismin hacmi kaç br^3 tür?

A) $6\pi^2$ B) $12\pi^2$ C) $16\pi^2$ D) $24\pi^2$ E) $32\pi^2$

10•

$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\cdot dx$ integralinin eşiti nedir?

A) $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$

B) $-\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$

C) $-\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

D) $\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$

E) $\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

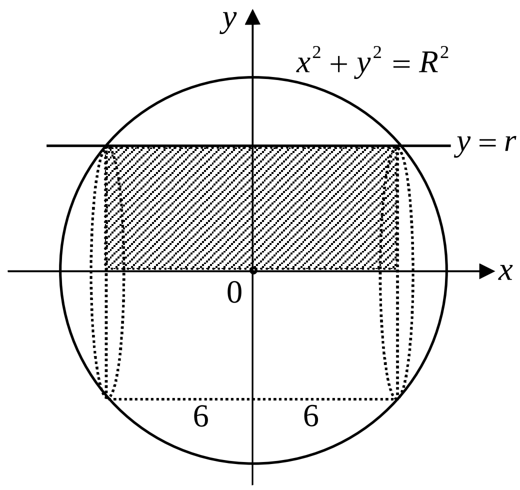
11•

$p\geq 2$ olmak üzere

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{pn}\right]$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\ln p$ B) 0 C) 1 D) $\ln p$ E) ∞

12•



Yarıçapı $R\,cm$ olan bir küreden, yüksekliği $12\,cm$ olan silindirik bir oyuk açılacak biçimde bir cisim çıkarılmaktadır. Geriye kalan cismin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 72π B) 117π C) 180π D) 288π E) 300π

B	B	A	–	A	D	D