Planteamiento de problemas de programación lineal

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Ejemplo. Tecnología Agrícola, S.A.

Mezcla de productos

Tecnología Agrícola, S.A. es una compañía fabricante de fertilizantes. El gerente desea planear la combinación de sus dos mezclas a fin de obtener las mayores utilidades. Las mezclas son

Fertilizante tipo	Nitrato	Fosfato	Potasio	Barro
5-5-10	5	5	10	80
5-10-5	5	10	5	80

El mayorista comprará cualquier cantidad de ambas mezclas de fertilizante que la compañía pueda fabricar. Está dispuesto a pagar a $71.50 la tonelada de **5-5-10** y a $69 la tonelada de **5-10-5.**

En este mes la disponibilidad y costos de materias primas son:

	Nitrato	Fosfato	Potasio	Barro
Cantidad (Toneladas)	1100	1800	2000	ilimitado
Costo por tonelada ($)	200	80	160	10

Hay un costo de $15 por tonelada por mezclado de los fertilizantes.

CARACTERÍSTICAS DEL CASO.

1. Maximización de las utilidades (de la fabricación de los 2 tipos de fertilizantes).UN SOLO OBJETIVO.
2. Recursos escasos (los insumos o ingredientes). RESTRICCIONES.
3. Se pueden sumar las utilidades de los productos para calcular la utilidad total. ADITIVIDAD.
4. Proporcionalidad. LA FUNCIÓN OBJETIVO Y LAS RESTRICCIONES DEBEN SER PROPORCIONALES AL NIVEL DE FABRICACIÓN DE CADA PRODUCTO.
5. No se pueden fabricar cantidades negativas de los productos.
6. Divisibilidad. SON POSIBLES ASIGNACIONES FRACCIONARIAS DE LOS PRODUCTOS.

MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Variables de decisión.

- X1= toneladas del fertilizante 5-5-10 que se fabrican.
- X2 = toneladas del fertilizante 5-10-5 que se fabrican.

Supuestos

- Utilidad = Ingresos por ventas – Costos
- Los costos pueden ser fijos y variables. Los fijos no varían con el nivel de producción, por tanto se pueden omitir en el cálculo de la mezcla de productos que maximice las utilidades.

Los costos que se consideran son los de los insumos:

Costo del nitrato por tonelada del 5-5-10	0.05	X	$200	= $ 10.00
Costo del fosfato por tonelada del 5-5-10	0.05	X	$80	= $ 4.00
Costo del potasio por tonelada del 5-5-10	0.10	X	$160	= $ 16.00
Costo del barro por tonelada del 5-5-10	0.80	X	$10	= $ 8.00
Costo total de los ingredientes del 5-5-10				= $ 38.00
Costo del mezclado				= $ 15.00
Costo total				= $ 53.00

- Ingresos por ventas – Costos = Utilidad del 5-5-10
- \$71.50 - \$ 53.00 = \$18.50 por tonelada que se fabrique
- De una manera semejante para el 5-10-5 la utilidad por tonelada fabricada es \$20.00
- La función objetivo (que suma la utilidad de ambos productos) será:
- $Z = 18.5 X1 + 20 X2$

RESTRICCIONES DEL PROBLEMA

- Veamos el caso del nitrato. Por cada tonelada de 5-5-10 que se fabrica se utilizan 0.05 (5%) de este insumo. Por ello, si se fabrican X1 toneladas de 5-5-10 se utilizarán 0.05 X1 de nitrato.
- De forma similar para el 5-10-5, por cada tonelada que se fabrica se utilizan 0.05 (5%) de este insumo. Por ello, si se fabrican X2 toneladas de 5-5-10 se utilizarán 0.05 X2 de nitrato.
- Y sólo tenemos 1100 toneladas del mismo. Y en la fabricación podemos o no usar todo el nitrato disponible. De ahí que la restricción del nitrato sería:

0.05 X1 + 0.05 X2 <= 1100

- Los coeficientes de $X1$ y $X2$ se llaman tasas físicas de sustitución.
- Las restricciones para los otros dos insumos limitados son:
- Fosfato: $0.05\ X1 + 0.10\ X2 <= 1800$
- Potasio: $0.10\ X1 + 0.05\ X2 <= 2000$

- Incluimos las restricciones de no negatividad, ya que no son posibles valores negativos de producción.
- X1, X2 >= 0
- En resumen el problema se plantea como:

Maximizar 18.5 X1 + 20 X2

Sujeto a

0.05 X1 + 0.05 X2 <= 1100

0.05 X1 + 0.10 X2 <= 1800

0.10 X1 + 0.05 X2 <= 2000

X1, X2 >= 0

Ejemplo. La empresa High Tech Co.

Asignación de recursos limitados

- La empresa High Tech Co. ensambla componentes electrónicos importados para la producción de 2 tipos de computadoras.
- A uno de los modelos se le denomina HTDC y al otro HTPC. Los administradores de High Tech están interesados en elaborar
- un programa semanal de producción para ambos productos tal que maximice la utilidad o ganancia.

- HTDC genera una contribución a las utilidades de $50 dólares por unidad, en tanto HTPC solo aporta $ 40 por unidad.
- Existe una disponibilidad máxima de 150 horas de ensamble para la producción de la semana siguiente.
- Cada unidad de HTDC requiere de 3 horas de tiempo de ensamblado, y cada unidad de HTPC requiere de 5 horas, High Tech tiene en estos momentos un inventario de solo 20 monitores de los que se emplean en la HTDC; por ello, no es posible ensamblar más de 20 unidades de este tipo.
- Finalmente, High Tech solo dispone de 300 pies cúbicos de espacio de almacén para la producción de dichos equipos.
- Cada unidad de HTDC requiere de 8 pies cúbicos de espacio de almacén y cada unidad de HTPC requiere de 5 pies cúbicos.

1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

PROBLEMA: Desconocer la cantidad de productos (HTDC y HTPC) que deben ser fabricados durante la siguiente semana por la cía. High Tech.

OBJETIVO: Maximizar la ganancia o utilidad que High Tech obtenga por la producción de HTDC y HTPC.

ALTERNATIVAS:
- Producir solo HTDC.
- Producir solo HTPC.
- Fabricar una mezcla de HTDC y HTPC.

RESTRICCIONES:
- Disposición máxima de 150 horas de ensamble.
- Disposición en inv. de solo 20 monitores para HTPC.
- Disposición de un espacio de almacén de 300 pies cúbicos para los P.T.

2. CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA REPRESENTAR EL SISTEMA BAJO ESTUDIO

Será una idealización abstracta del problema. Debemos cuidar que el modelo sea permanentemente una representación válida

del sistema / problema.

OBJETIVO $\Rightarrow$ Función Objetivo:

VALIDEZ:

- Si; porque predice los efectos relativos en las alternativas al cambiar el valor de las variables con suficiente exactitud como para tomar decisiones.
- Si; porque posee un alto grado de correlación entre lo predecido en el modelo y lo que sucedería en la vida real.
- Si; porque trata de desarrollar una medida cuantitativa de la efectividad (relativa) del objetivo.

Para el problema presente es:

Maximizar $Z = 50X1 + 40X2$

Variables:

$X1$ = Número de unidades de HTDC que se ensamblan.

$X2$ = Número de unidades de HTPC que se ensamblan.

¿ Cuánto aportan a la utilidad o ganancia los productos HTDC y HTPC?

HTDC: $ 50.

HTPC: $ 40.

RESTRICCIONES:
- 150 hrs. de ensamble
- 20 monitores HTPC
- 300 ft3 de almacén.

Max $Z = 50X1 + 40X2$

Sujeta a: $3X1 + 5X2 \leq 150$ tiempo de ensamble.

$X2 \leq 20$ monitores para HTPC

$8X1 + 5X2 \leq 300$ espacio para almacenar.

$X1, X2, X3, X4, X5 \geq 0$

Ejemplo. ALMEX, S.A.

Mezcla de productos

- ALMEX, S.A. Una pequeña empresa especializada en la fabricación de aleaciones para la industria aeroespacial, ganó una licitación para proveer 2000 libras de una aleación de aluminio para una empresa estadounidense.
- El precio de venta de este material es de $ 105.00 por libra.
- La aleación metálica debe cumplir las siguientes especificaciones: cobre 15% mínimo; Magnesio 3% máximo y 2% mínimo; Níquel 20% mínimo; impurezas 1.5 % máximo y el resto es aluminio.

ALMEX tiene cinco metales básicos que pueden mezclarse para fabricar la aleación solicitada. Dichos metales son:

METAL	COSTO POR LB (USD)	% COBRE (Cu)	% MAGNESIO (Mg)	% NIQUEL (Ni)	% IMPUREZAS
M1	45	12	3	3	2
M2	82	24	2	65	1
M3	73	8	1	55	2
M4	35	4	2	15	3
M5	95	15	3	75	1

Los costos por libra incluye los llamados costos fijos o de operación.
Debido a la escasez del metal M2, la empresa no puede utilizar más de 600 libras de dicho material.
¿Cuál es la mezcla de materiales básicos que ofrece las mayores utilidades?

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

PROBLEMA: Desconocer la cantidad (lbs) de c/u de los materiales básicos que deben integrar la aleación.

OBJETIVO: Maximizar las utilidades que ALMEX obtenga por la producción y comercialización de la aleación.

ALTERNATIVAS: Múltiples

RESTRICCIONES:

Cu 15%

Mg 3% max y 2% min.

Ni 20 % min.

impurezas 1.5 % max

M2 600 lbs. max.

Identificación de variables :

X1 =	Cantidad de lbs. a	utilizar del	metal	M1	en la aleación.
X2 =	“	“	“	M2	“
X3 =	“	“	“	M3	“
X4 =	“	“	“	M4	“
X5 =	“	“	“	M5	“

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÀTICO

Función Objetivo:

La ecuación de la función objetivo es una función de maximización (objetivo) y consta, como todas las funciones de éste tipo, de dos elementos: variables de desición (X1, X2, ... Xn) y coeficientes (ya sea de costo o de utilidad/aportación a la ganancia, como en éste caso):

Max $Z = (105 - 45) X1 + (105 - 82) X2 + (105 - 73) X3 + (105 - 35) X4 + (105 - 95) X5$

$$Z = 60X1 + 23X2 + 32X3 + 70X4 + 10X5$$

RESTRICCIONES

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 = 2000.$$

$$X1 + 0.24X2 + 0.08X3 + 0.04X4 + 0.15X5 \geq 300$$

$$0.03X1 + 0.02X2 + 0.01X3 + 0.02X4 + 0.03X5 \geq 40$$

$$0.03X1 + 0.02X2 + 0.01X3 + 0.02X4 + 0.03X5 \leq 60$$

$$0.03X1 + 0.65X2 + 0.55X3 + 0.15X4 + 0.75X5 \geq 400$$

$$0.02X1 + 0.01X2 + 0.02X3 + 0.03X4 + 0.01X5 \leq 30$$

$$X2 \leq 600$$

$$Xj \geq 0$$

Ejemplo. Inversión financiera

Análisis de portafolios de inversión

- El señor Espinosa es un analista financiero en un reconocido grupo financiero, el cual le ha pedido que prepare recomendaciones de inversión de una transferencia de fondos por un total de $ 18,000,000.
- La administración a sugerido diversificar las inversiones asignado los recursos entre los siguientes instrumentos : Certificado de desarrollo (CEDES), certificado de la tesorería (CETES), acciones comunes con buen historial, acciones especulativas, bonos de compañía y bienes raíces.

- El señor Espinosa ha estimado un rendimiento anual para cada instrumento de inversión y ha desarrollado un factor de riesgo para cada uno de ellos el cual señala la probabilidad de que el rendimiento real de las inversiones en este instrumento sea inferior al rendimiento esperado.
- Por último, elaboró un pronóstico del numero promedio de años en que se espera obtener el rendimiento esperado.
- Todo lo anterior se concentra en la siguiente tabla:

INSTRUMENTO DE INVERSION	RENDIMIENTO ANUAL ESPERADO (%)	FACTOR DE RIESGO	PLAZO PROMEDIO DE LA INVERSION (AÑOS)
CEDES	18.5	0.02	8
CETES	19.0	0.01	1
ACCIONES COMUNES	25.0	0.38	5
ACCIONES ESPECULATIVAS	33.0	0.45	6
BONOS DE COMPAÑÍAS.	16.7	0.07	2
BIENES RAICES	30.0	0.35	4

- La Empresa expresó que le gustaría tener un periodo promedio ponderado de inversión de cuando menos 5 años y que el factor promedio ponderado de riesgo no debe ser superior a 0.20, la ley prohíbe que se inviertan más del 25% de los fondos con esta procedencia en bienes raíces y acciones especulativas.
- ¿Qué recomendación debe hacer el señor Espinosa si se pretende maximizar el rendimiento sobre la inversión de $18,000,000?

PROBLEMA: Desconocer la cantidad o proporción del total de recursos disponibles que se deben invertir en cada instrumento de inversión.

OBJETIVO: Determinar la proporción de los $ 18,000,000 que debe invertirse en cada uno de los instrumentos de inversión, de manera que se maximice el rendimiento esperado total anual.

RESTRICCIONES:

- Se deben invertir todos los fondos/recursos disponibles (18,000,000) en uno o más de los instrumentos de inversión.
- El factor promedio ponderado de riesgo, no debe ser superior a 0.20
- El periodo promedio ponderado de inversión debe ser cuando menos de 5 años.
- Cuando más puede invertirse el 25% de la cartera de bienes raíces y acciones especulativas.

VARIABLES

X1 = Proporción de la cartera que se invierte en				CEDES
X2 =	“	“	“	CETES
X3 =	“	“	“	ACCIONES COMUNES
X4 =	“	“	“	ACCIONES ESPECULATIVAS
X5 =	“	“	“	BONOS DE EMPRESAS
X6 =	“	“	“	BIENES RAÍCES.

Función Objetivo:

$$\text{Max} \quad Z = 18.5X_1 + 19X_2 + 25X_3 + 33X_4 + 16.7X_5 + 30X_6$$

RESTRICCIONES:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 1$$

$$8X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 + 2X_5 + 4X_6 \geq 5$$

$$0.02X_1 + 0.01X_2 + 0.38X_3 + 0.45X_4 + 0.07X_5 + 0.35X_6 \leq 0.20$$

$$X_4 + X_6 \leq 0.25$$

$$X_j \geq 0.$$

Ejemplo. Fabricante de muebles “Mártires de Barbados”

Asignación de recursos escasos

- La empresa fabricante de muebles “Mártires de Barbados” desea establecer un proyecto de plan de producción para un trimestre de 2004, con el objetivo de maximizar la ganancia.
- De los recursos disponibles, el mas restrictivo es la madera, de la que se cuanta con un máximo de 100 000 pies^3. Los insumos de pies por unidad según el tipo de mueble son los siguientes:

Mueble	A	B	C	D	E	F
Pies^3	2	3	3/2	5/3	3	7/2

La fuerza de trabajo debe ser utilizada en un mínimo de 12 940 horas hombre. Cada hora-hombre permite obtener como promedio las siguientes cantidades de muebles:

Mueble	A	B	C	D	E	F
Unidades	10	12	8	7	11	9

La demanda del mueble B deberá satisfacerse en un mínimo de 20 000 unidades; y, si la producción nacional alcanza, se puede cubrir con importaciones.
Un estudio económico ha permitido calcular una ganancia unitaria para el mueble B importado de $8, ya expresado en su equivalente en pesos cubanos.

- La demanda calculada de los muebles E y F aconseja producir en el periodo no mas de 15 000 y 25 000 unidades respectivamente.
- Los estudios de demanda de los restantes productos establecen que cualquier que se produzca será absorbida por el mercado.
- Las ganancias por el tipo de mueble son las siguientes:

Mueble	A	B	C	D	E	F
Ganancia por unidad	\$40	\$22	\$38	\$36	\$34	\$42

Construcción del modelo

- De la lectura del planteamiento del problema se aprecia que se cumplen los supuestos de un modelo de programación lineal.
- El primer paso es definir la variable de decisión conceptual y dimensionalmente:
- A partir de observar como esta definida la función objetivo, se puede inferir que variables en este caso se definirán como sigue:

$x1$	-	unidades	del	mueble	A	a	producir	en	el	trimestre	
$x2$	-	“	“	“	B	“	“	“	“	“	
$x3$	-	“	“	“	C	“	“	“	“	“	
$x4$	-	“	“	“	D	“	“	“	“	“	
$x5$	-	“	“	“	E	“	“	“	“	“	
$x6$	-	“	“	“	F	“	“	“	“	“	

Como se plantea la posibilidad de importación del mueble B, lo cual implica diversidad de origen para este producto, es necesario definir la variable X7 – unidades del mueble B a importar.

Al no existir otro tipo de diversidad en la definición de las variables de decisión, en este problema se utilizaran siete.

A continuación se escribe la condición de no negatividad:

$xj \geq 0 \qquad j = 1 \ldots 7$

El segundo paso es la construcción de las restricciones, que son de dos tipos: de recursos y de demanda.

1. restricciones de recursos:

- se plantean exclusivamente la madera y las horas-hombres.

Para los pies de madera

La dimensión de “b1” es igual a pies cúbicos de madera. El signo de la restricción será de menor o igual que, porque se trata de una disponibilidad máxima.

En general la disponibilidad se planteara como una desigualdad de menor o igual que, a menos que se especifique una determinada disponibilidad que deba ser utilizada en su totalidad.

En esta restricción participaran todas las variables que representan los muebles producidos en la empresa es decir:

x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x 6 $\leq$ 100 000 pies^3 de madera

Pasemos al coeficiente “aij”. Como que la dimensión del b1 es pies3 de madera, y la de la variable de decisión en general es muebles, el “aij” se deberá definir como:

$$\frac{\text{pies}^3 \text{ de madera}}{\text{por mueble}}$$

Al estar los datos planteados en la forma conveniente, se multiplicaran los coeficientes por la variable, es decir:

$$2 \text{ x } 1 + 3 \text{ x } 2 + 3 \text{ x } 3 + 5/3 \text{ x } 4 + 3 \text{ x } 5 + 7/2 \text{ x } 6 \quad \leq \quad 100\,000$$

Para las horas –hombre

La dimensión del “b2” es igual a horas-hombre. El signo de la restricción será mayor o igual que (≥), puesto que la fuerza de trabajo debe ser utilizada en un mínimo. En esta restricción también participan las mismas variables que en la restricción anterior

Como que la dimensión del “b2” es horas-hombre, y la variable de decisión en general es muebles, el “aij” se definirá como:

$$\frac{\text{horas-hombre}}{\text{por hora}}$$

Al estar los datos planteados como muebles por hora-hombre (es decir a la inversa) se dividirá el coeficiente por las variables, o sea:

$$\frac{x1}{10} + \frac{x\,2}{12} + \frac{x3}{8} + \frac{x4}{7} + \frac{x5}{11} + \frac{x\,6}{9} \geq 12\,940$$

Restricciones de demandas

Para el mueble B, la dimensión del “b_3” es de 20 000 unidades.

El signo de la restricción será de $\geq$ dado que se plantea un requisito mínimo, y en ella participara no solamente la variable x_2, sino también la x_7 tomando en cuenta que se especifica la posibilidad de importación.

Como que la dimensión del “b3” es unidades del mueble B, y las variables de decisión también se definen como unidades de muebles, el “aij” será igual a la unidad.

Por lo tanto:

$$x_2 + x_7 \geq 20\,000$$

Para los muebles E y F se plantea una demanda máxima, por lo que el signo de las restricciones será de $\leq$; y en ellas participaran solamente las variables x5 y x6 respectivamente.

Los “aij” serán iguales a la unidad por las mismas razones señaladas para la restricción anterior por lo tanto

$x_5 \leq 15\,000$

$x_6 \leq 25\,000$

La función objetivo

Como se desea maximizar la ganancia, y los datos vienen expresados por unidad de producto (mueble), se plantea:

$$\max \; z = 40x_1 + 22x_2 + 38x_3 + 36x_4 + 34x_5 + 42x_6 + 8x_7$$