MÉTODO SIMPLEX
MÉTODO DE SOLUCIÓN GRÁFICO

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Introducción a la Programación Lineal

- Un modelo de programación lineal busca maximizar o minimizar una función lineal, sujeta a un conjunto de restricciones lineales.

- Un modelo de programación lineal esta compuesto de lo siguiente:

  * Un conjunto de variables de decisión

  * Una función objetivo

  * Un conjunto de restricciones

La importancia de la programación lineal:

* Ciertos problemas se describen fácilmente a través de la programación lineal.

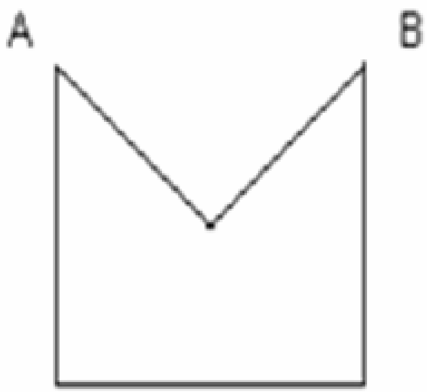
* Muchos problemas pueden aproximarse a modelos lineales.

* La salida generada por el programa que resuelve el modelo de programación lineal entrega información útil para responder nuevas condiciones sobre el "qué pasa si".

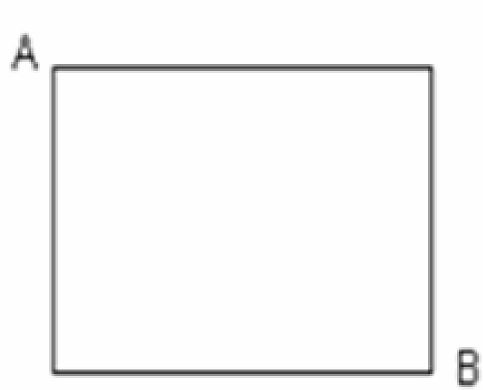
Región Factible y Solución Óptima

- La región factible para un problema de PL es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las restricciones, incluso las de signo.
- Dicha región es un conjunto convexo porque cualquier segmento rectilíneo que una a un par de puntos, A y B por ejemplo, se encuentra completamente en dicho conjunto (s).

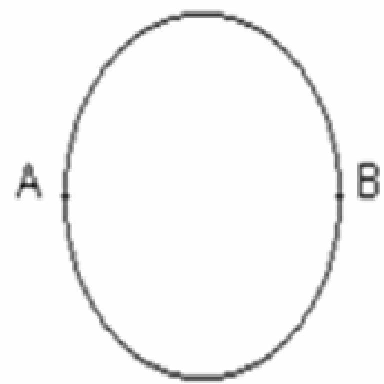
Aquí podemos observar dos regiones factibles (B Y C) en donde tenemos completamente definido un probable segmento A-B rectilíneo, a diferencia de los conjuntos A y D (no – convexos) en donde lo anterior no es posible.



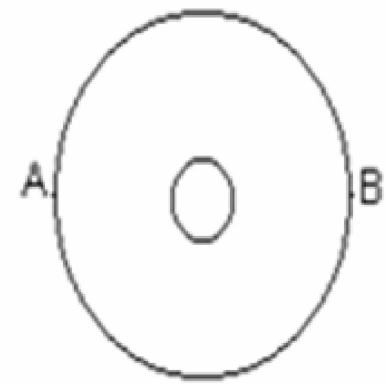
A. No Convexo



B. Convexo



C. Convexo



D. No Convexo

- Para un problema de maximización, una solución óptima es un punto de la región factible con el mayor valor para la función objetivo.
- Viceversa para el problema de minimización.

Método Simplex

- Es un algoritmo sistemático que examina las vértices, esquinas o puntos extremos (cuando el problema se puede representar geométricamente) o de un conjunto factible en busca de una solución optima.
- El algoritmo arranca en la fase 1 determinando un vértice inicial.
- Si el problema es inconsistente en esta fase 1 se descubrirá este hecho.
- En la siguiente iteración el algoritmo empieza a recorrer el conjunto factible de un vértice a otro adyacente.

- Cada vértice del conjunto factible puede representarse en forma algebraica como una clave particular de solución de un conjunto de ecuaciones lineales.
- Se generan soluciones diferentes de tal forma que producen una secuencia de vértices adyacentes.
- Cada movimiento en la secuencia (de un vértice adyacente) se llama iteración o pivote y el movimiento implica una manipulación en un sistema lineal.

- El algoritmo esta diseñado de una manera que la función objetivo no disminuya (minimización) y generalmente aumentara disminuirá en cada vértice sucesivo de la secuencia.
- Si el problema es no acotado, el algoritmo lo mostrara durante su ejecución.
- Cuando se alcanza un vértice optimo, el algoritmo reconoce este hecho y termina la operación.

Ejemplo. El problema de la industria de juguetes “Galaxia”.

Maximización

El problema de la industria de juguetes “Galaxia”.

- Galaxia produce dos tipos de juguetes:

  * Space Ray

  * Zapper

- Los recursos están limitados a:

  * 1200 libras de plástico especial.

  * 40 horas de producción semanalmente.

Requerimientos de Marketing.

* La producción total no puede exceder de 800 docenas.
* El número de docenas de Space Rays no puede exceder al número de docenas de Zappers por más de 450.

Requerimientos Tecnológicos.

* Space Rays requiere 2 libras de plástico y 3 minutos de producción por docena.
* Zappers requiere 1 libra de plástico y 4 minutos de producción por docena.

- Plan común de producción para:

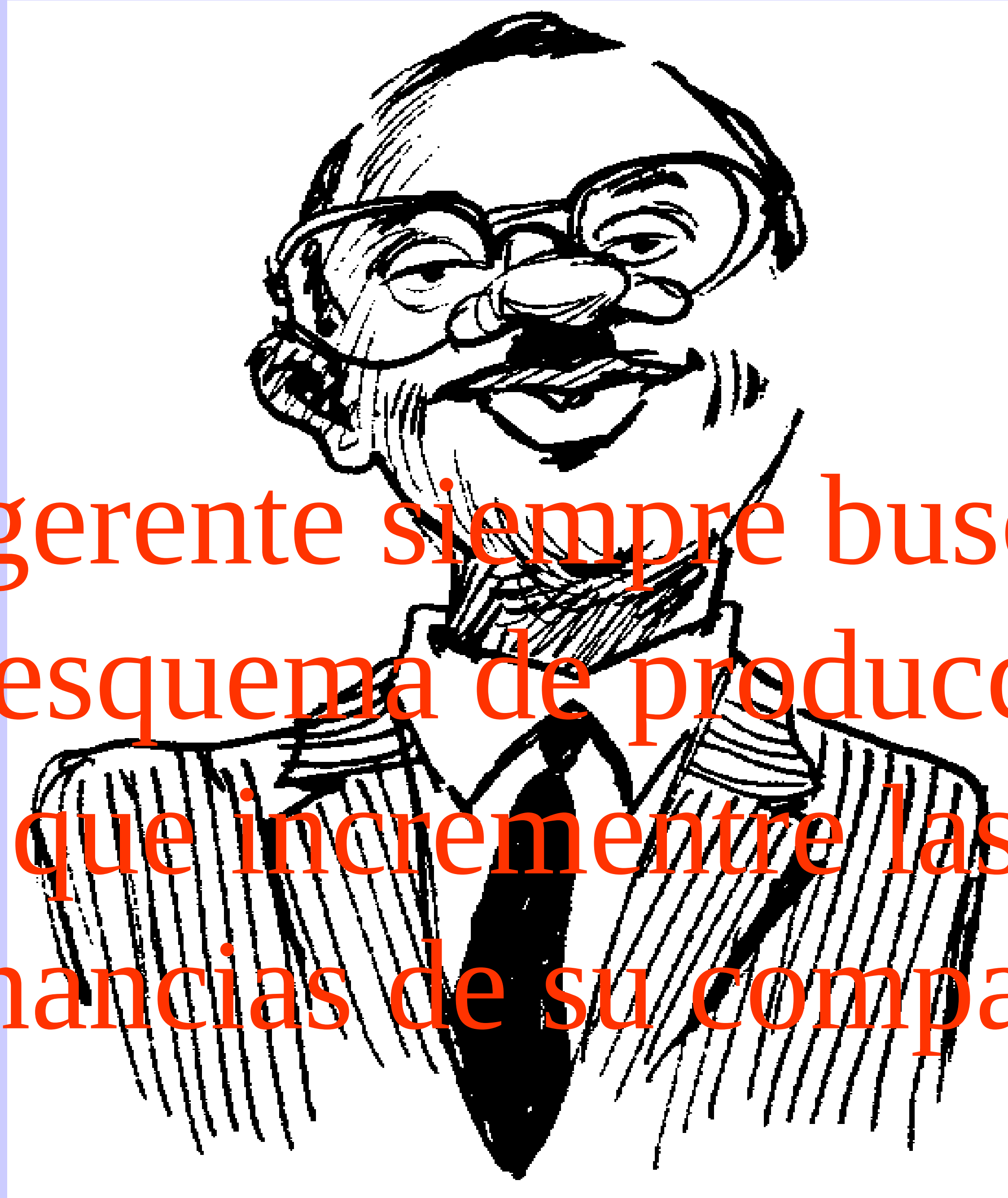
  * Fabricar la mayor cantidad del producto que deje mejores ganancias, el cual corresponde a Space Ray ($8 de utilidad por docena).
  * Usar la menor cantidad de recursos para producir Zappers, porque estos dejan una menor utilidad ($5 de utilidad por docena).

- El plan común de producción consiste en:

  Space Rays = 550 docenas

  Zappers = 100 docenas

  Utilidad = $4900 por semana



El gerente siempre buscará un esquema de producción que incremente las ganancias de su compañía

EL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PROVEE UNA SOLUCIÓN INTELIGENTE PARA ESTE PROBLEMA

Solución

- Variables de decisión

  * X1 = Cantidad producida de Space Rays (en docenas por semana).

  * X2 = Cantidad producida de Zappers (en docenas por semana).

- Función objetivo

  * Maximizar la ganancia semanal.

Modelo de Programación Lineal

$$\text{Max } 8X1 + 5X2 \quad \text{(ganancia semanal)}$$

Sujeto a:

$2X1 + 1X2 <= 1200$ (Cantidad de plástico)

$3X1 + 4X2 <= 2400$ (Tiempo de producción)

$X1 + X2 <= 800$ (Limite producción total)

$X1 - X2 <= 450$ (Producción en exceso)

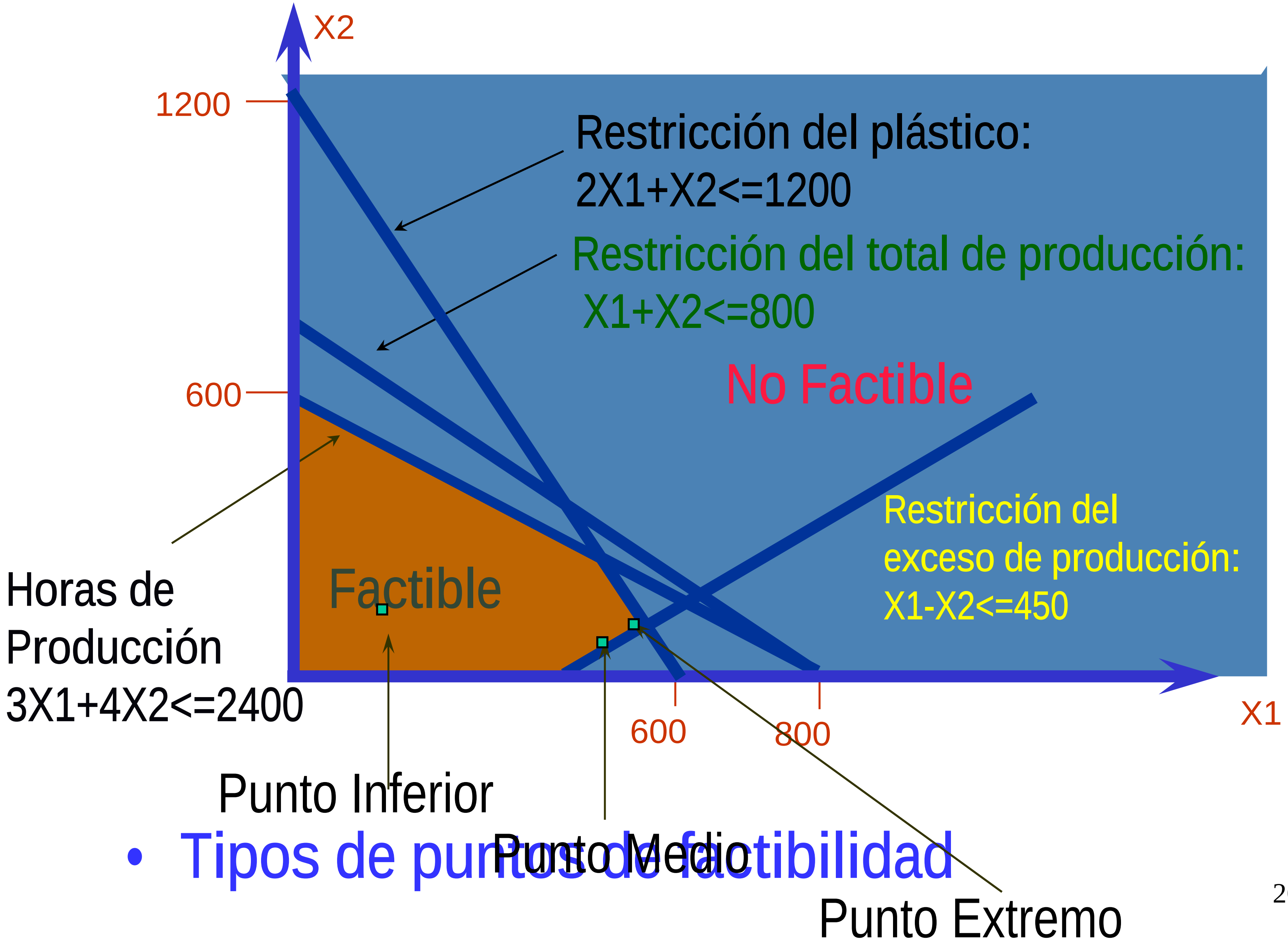
$X_j >= 0$, $j= 1, 2.$ (Resultados positivos)

Conjunto de soluciones factibles para el modelo lineal.

- El conjunto de puntos que satisface todas las restricciones del modelo es llamado:

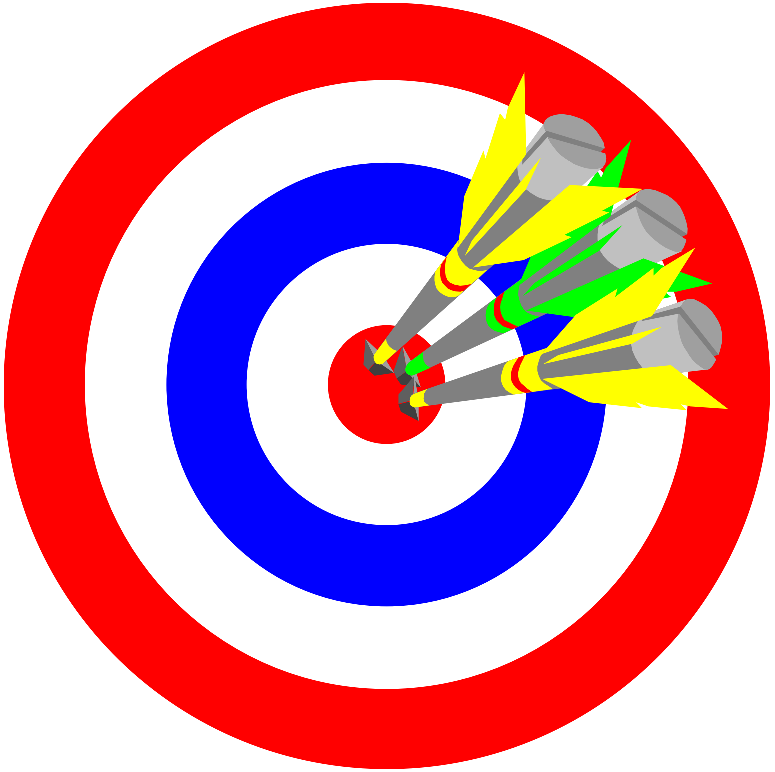
REGION FACTIBLE

USANDO UN GRAFICO SE PUEDEN REPRESENTAR TODAS LAS RESTRICCIONES, LA FUNCION OBJETIVO Y LOS TRES TIPOS DE PUNTOS DE FACTIBILIDAD.



- Tipos de puntos de factibilidad

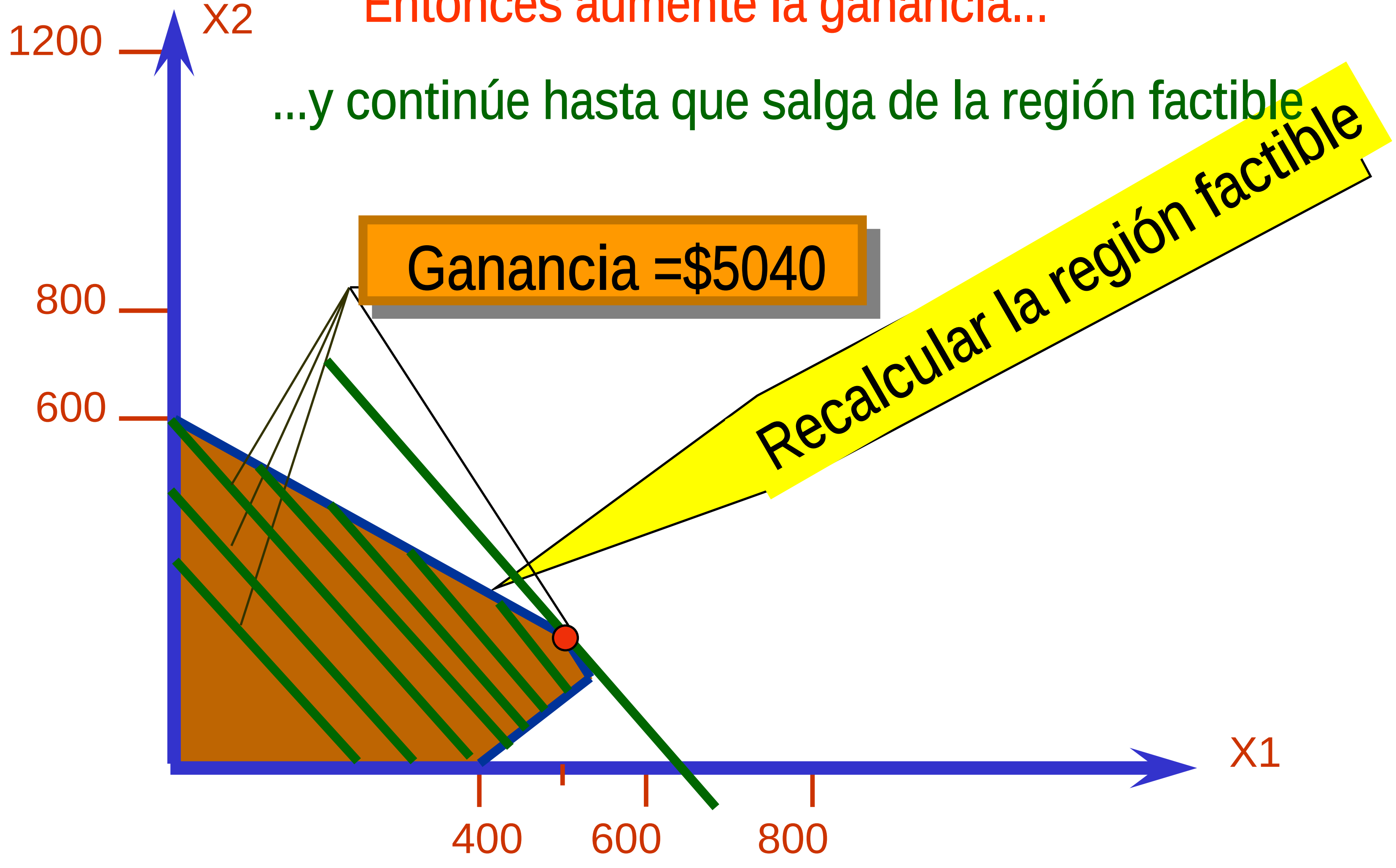
Resolución gráfica para encontrar la solución óptima.

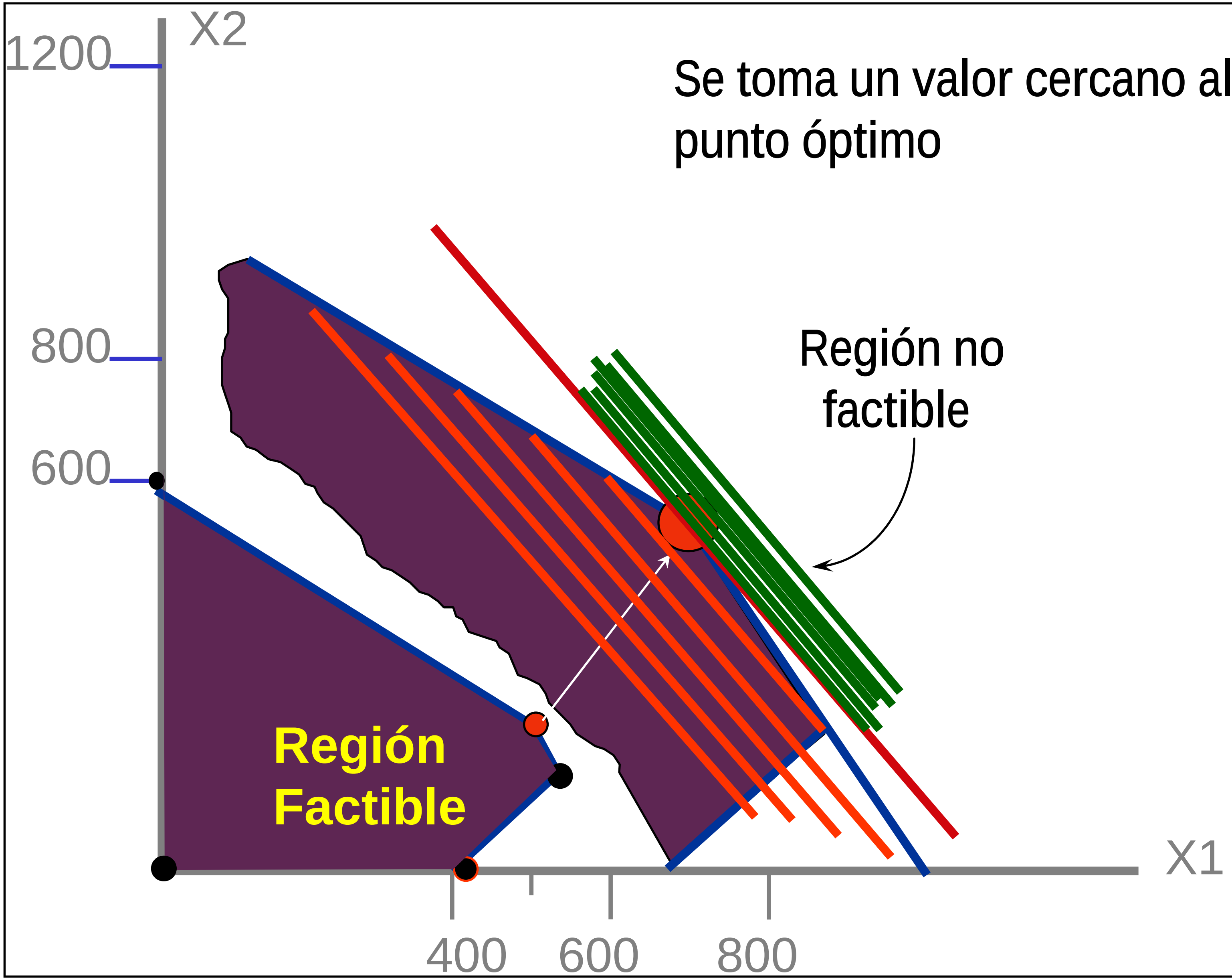


comenzar con una ganancia dada de = $2,000...

Entonces aumente la ganancia...

...y continúe hasta que salga de la región factible




X2
1200
800
600
Se toma un valor cercano al punto óptimo
Región no factible
Región Factible
X1
400
600
800

Resumen de la solución óptima

Space Rays = 480 docenas

Zappers = 240 docenas

Ganancia = $5040

* Esta solución utiliza todas las materias primas (plástico) y todas las horas de producción.
* La producción total son 720 docenas (no 800).
* La producción de Space Rays excede a la de Zappers por solo 240 docenas y no por 450.

Soluciones óptimas y puntos extremos.

* Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, entonces esta corresponde a un punto extremo.

Múltiples soluciones óptimas.

* Cuando existen múltiples soluciones óptimas implica que la función objetivo es una recta paralela a uno de los lados de la región factible.
* Cualquier promedio ponderado de la solución óptima es también una solución óptima.

Ejemplo. Tecnología Agrícola, S.A.

Maximización

Tecnología Agrícola, S.A.

Tecnología Agrícola, S.A. es una compañía fabricante de fertilizantes. El gerente desea planear la combinación de sus dos mezclas a fin de obtener las mayores utilidades. Las mezclas son

Fertilizante tipo	Nitrato	Fosfato	Potasio	Barro
5-5-10	5	5	10	80
5-10-5	5	10	5	80

El mayorista comprará cualquier cantidad de ambas mezclas de fertilizante que la compañía pueda fabricar. Está dispuesto a pagar a $71.50 la tonelada de **5-5-10** y a $69 la tonelada de **5-10-5.**

- En este mes la disponibilidad y costos de materias primas son:

	Nitrato	Fosfato	Potasio	Barro
Cantidad (Toneladas)	1100	1800	2000	ilimitado
Costo por tonelada ($)	200	80	160	10

- Hay un costo de $15 por tonelada por mezclado de los fertilizantes.

En resumen el problema se plantea como:

Maximizar 18.5 X1 + 20 X2

Sujeto a

$$0.05\,X1 + 0.05\,X2 \le 1100$$

$$0.05\,X1 + 0.10\,X2 \le 1800$$

$$0.10\,X1 + 0.05\,X2 \le 2000$$

$$X1,\ X2 \ge 0$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

Después de plantear en términos matemáticos el problema, ahora:

1. Grafiquemos las restricciones.
2. Grafiquemos la función objetivo.
3. Determinemos los valores de las variables en el punto que arroja las máximas utilidades.

Graficamos las desigualdades convirtiéndolas en igualdades

$0.05\ X1 + 0.05\ X2 = 1100$ P1(22000, 0) y P2(0, 22000)

$0.05\ X1 + 0.10\ X2 = 1800$ P3(36000, 0) y P4(0, 18000)

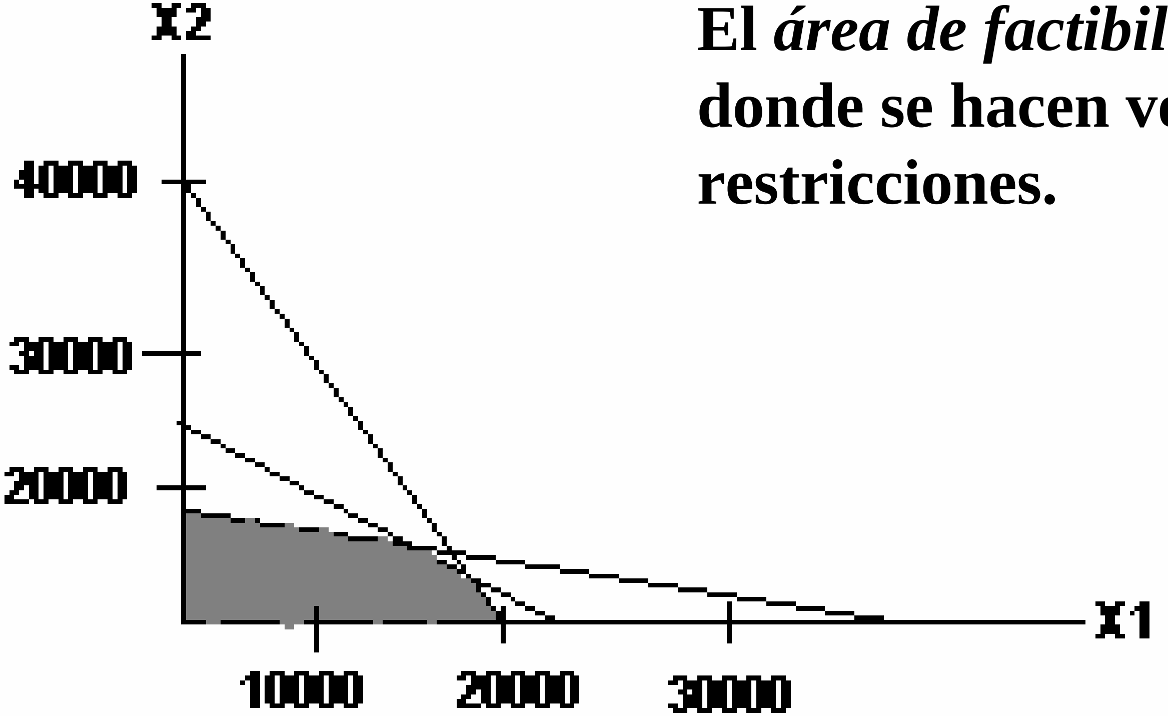
$0.10\ X1 + 0.05\ X2 = 2000$ P5(20000, 0) y P6(0, 40000)

$X1 = 0$

$X2 = 0$

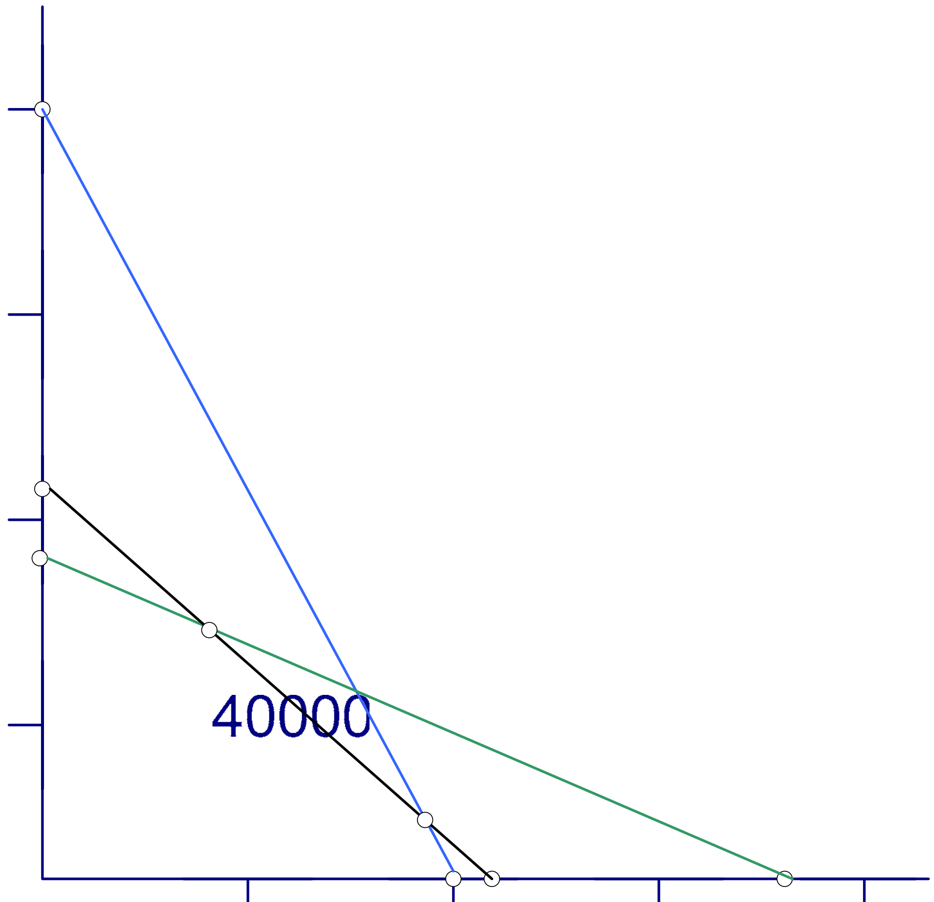
Con ello formamos el polígono o región de factibilidad, al intersectar el área que delimita cada desigualdad.

Polígono de factibilidad



El *área de factibilidad* es la región donde se hacen verdaderas las restricciones.

Marcamos los puntos



E

Evaluamos en la función objetivo cada uno de los puntos de la región factible para buscar el óptimo.

	X	Y	Z=18.5X1+20X2
A	0	18000	360000
B	8000	14000	428000
C	18000	4000	413000
D	20000	0	370000
E	0	0	0

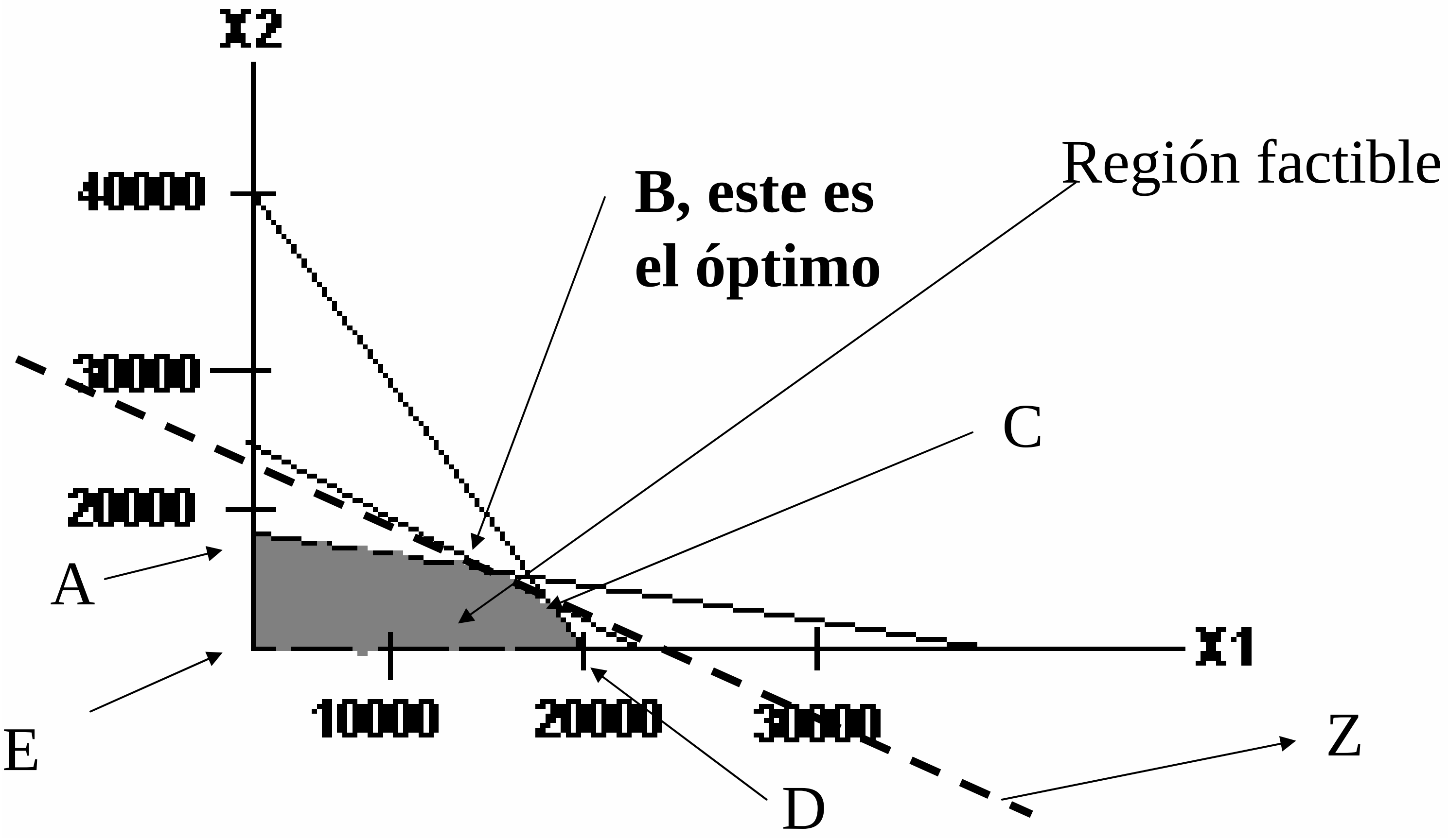
A, D y E se obtienen de manera directa de la gráfica.

Para evaluar B y C calculamos la intersección de las rectas.

B	C
$0.05\ X1 + 0.05\ X2 = 1100$	$0.05\ X1 + 0.05\ X2 = 1100$
$0.05\ X1 + 0.10\ X2 = 1800$	$0.10\ X1 + 0.05\ X2 = 2000$
$X1 = (1100 - 0.05X2) / 0.05$	$X1 = (1100 - 0.05X2) / 0.05$
$X1 = (1800 - 0.01X2) / 0.05$	$X1 = (2000 - 0.05X2) / 0.1$
$1100 - 0.05X2 = 1800 - 0.10X2$	$0.05(2000 - 0.05X2) = (1100 - 0.05X2)0.1$
$0.05X2 = 700$	$100 - 0.0025X2 = 110 - 0.005X2$
$X2 = 700 / 0.05 = 1400$	$0.0025X2 = 10$
$X1 = 8000$	
	$X2 = 4000$
	$X1 = 1800$

De la tabla se deduce que B es quien tiene el mayor valor para Z

El valor que maximiza la utilidad es B = 428000.



Significado del resultado

- En el contexto del problema:

Maximizar 18.5 X1 + 20 X2

Sujeto a

$$0.05\,X1 + 0.05\,X2 \le 1100$$
$$0.05\,X1 + 0.10\,X2 \le 1800$$
$$0.10\,X1 + 0.05\,X2 \le 2000$$
$$X1,\ X2 \ge 0$$

Para X1= 8000 y X2= 14000 se optimiza la producción de los fertilizantes.

Ejemplo.

Maximización

Resolver por el método gráfico

Máx. $z = 8x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$2x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

$$x_1 + x_2 \leq 800$$

$$x_1 - x_2 \leq 450$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Igualamos las restricciones y calculamos las rectas correspondientes

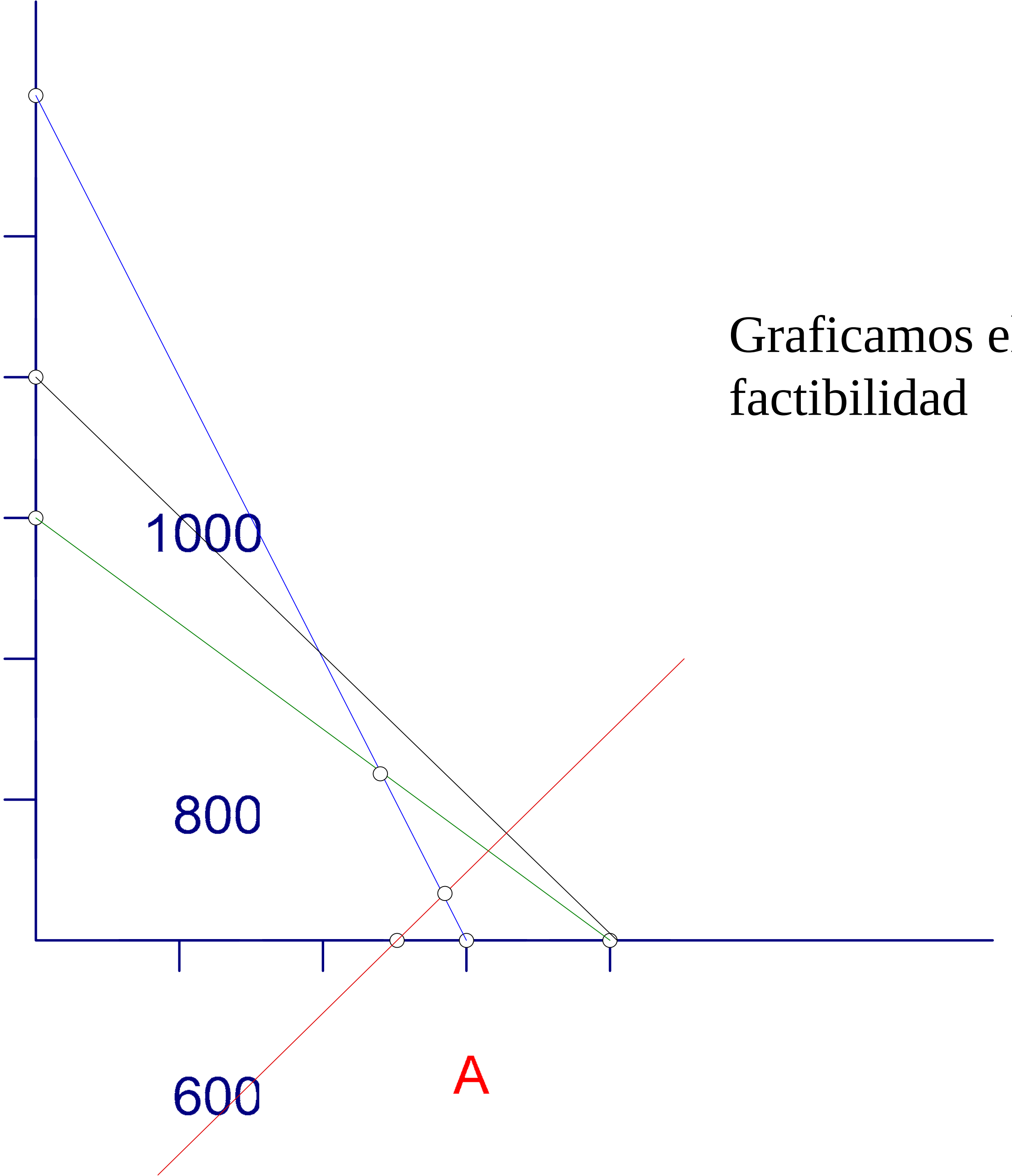
$2x_1 + x_2 = 1200$ — $P_1\ (600, 0)$ y $P_2\ (0, 1200)$

$3x_1 + 4x_2 = 2400$ — $P_3\ (800, 0)$ y $P_4\ (0, 600)$

$x_1 + x_2 = 800$ — $P_5\ (800, 0)$ y $P_6\ (0, 800)$

$x_1 - x_2 = 450$ — $P_7\ (450, 0)$ y $P_8\ (0, -450)$

$x_1 = x_2 = 0$



Graficamos el área de factibilidad

Evaluamos los vértices del polígono de factibilidad para hallar el mayor valor de Z

Puntos	x	y	$z = 8x_1 + 5x_2$
A	0	600	3000
B	480	240	5040
C	550	100	4900
D	450	0	3600
E	0	0	0

Para B	Para C
$2x_1 + x_2 = 1200$	$2x_1 + x_2 = 1200$
$3x_1 + 4x_2 = 2400$	$x_1 - x_2 = 450$
$x_1 = \frac{1200 - x_2}{2}$	$x_1 = 450 + x_2$
$1800 - \frac{3}{2}x_2 + 4x_2 = 2400$	$2(450 + x_2) + x_2 = 1200$
$x_2 = 240$	$x_2 = 100$
$x_1 = 480$	$x_1 = 550$

Por lo tanto B es el valor factible para maximizar z.

Ejemplo. Fabricación de televisores

Maximización

- Se producen 2 modelos: Astro y Cosmo

Modelos	Capacidad Diaria	Horas por Departamento		Utilidad por Aparato
		A	B	
Astro	70	1	1	$20
Cosmo	50	2	1	$10
Disponibilidad Total		120	90	

¿Cuál debe ser el plan de producción diaria por aparato?

Solución

Variables de decisión

xi = Número de televisores del modelo i que se fabrican por día, donde i=1,2

Función objetivo

$$Max\_Z = 20x_1 + 10x_2$$

Restricciones

$$x_1 \leq 70$$

$$x_2 \leq 50$$

$$x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 + x_2 \leq 90$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modelo de PL

$$\text{Max } Z = 20X1 + 10X2$$

Sujeto a:

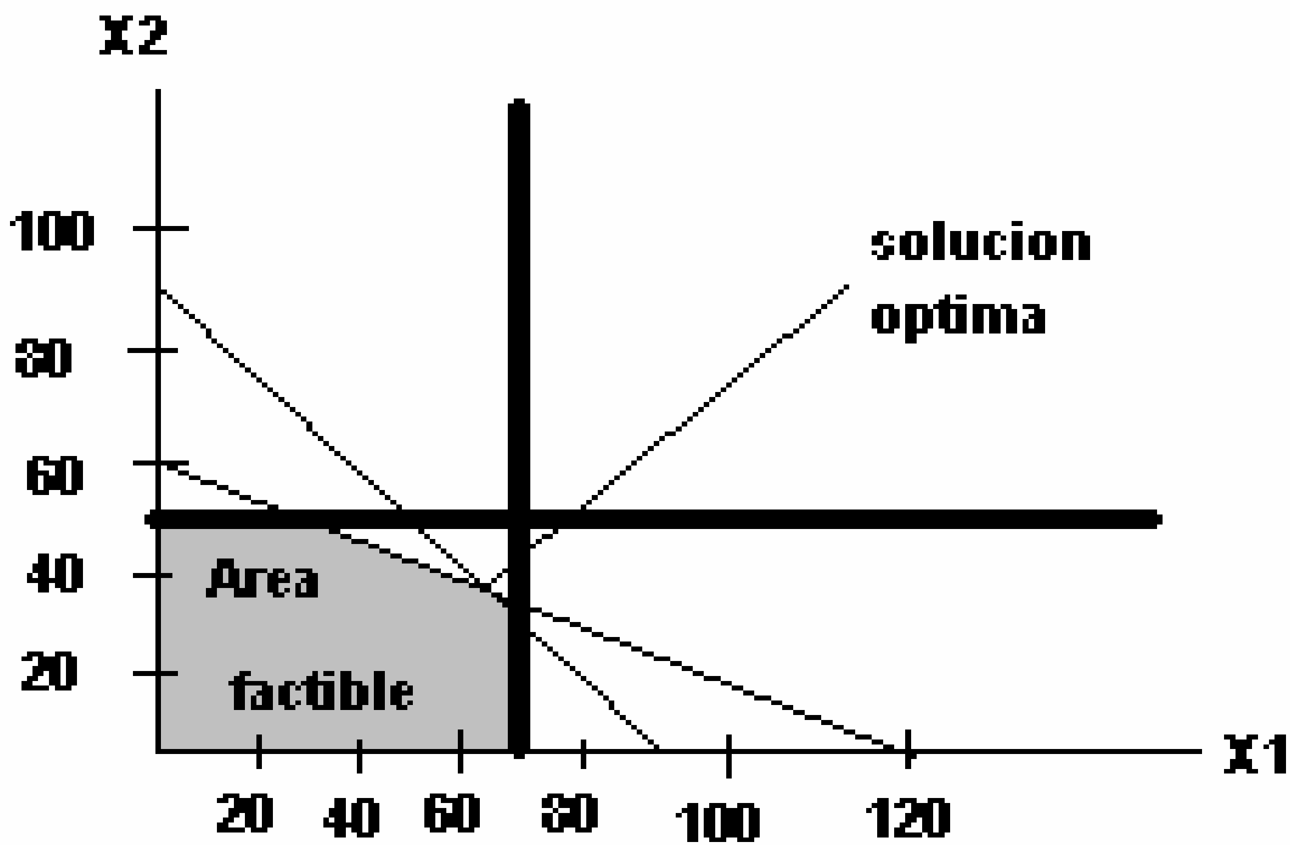
$$X1 + 2X2 <= 120$$

$$X1 + X2 <= 90$$

$$X1 <= 70$$

$$X2 <= 50$$

$$X1, X2 >= 0$$


X2
100
80
60
40
20
solucion
optima
Area
factible
X1
20
40
60
80
100
120

Ejemplo. Senora General Hospital

Minimización

En el problema de Señora General Hospital se obtuvo el siguiente modelo de programación lineal

Min. $z = 0.375x_1 + 0.50x_2$

Sujeto a:

$$100x_1 + 200x_2 \geq 1000$$

$$400x_1 + 250x_2 \geq 2000 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

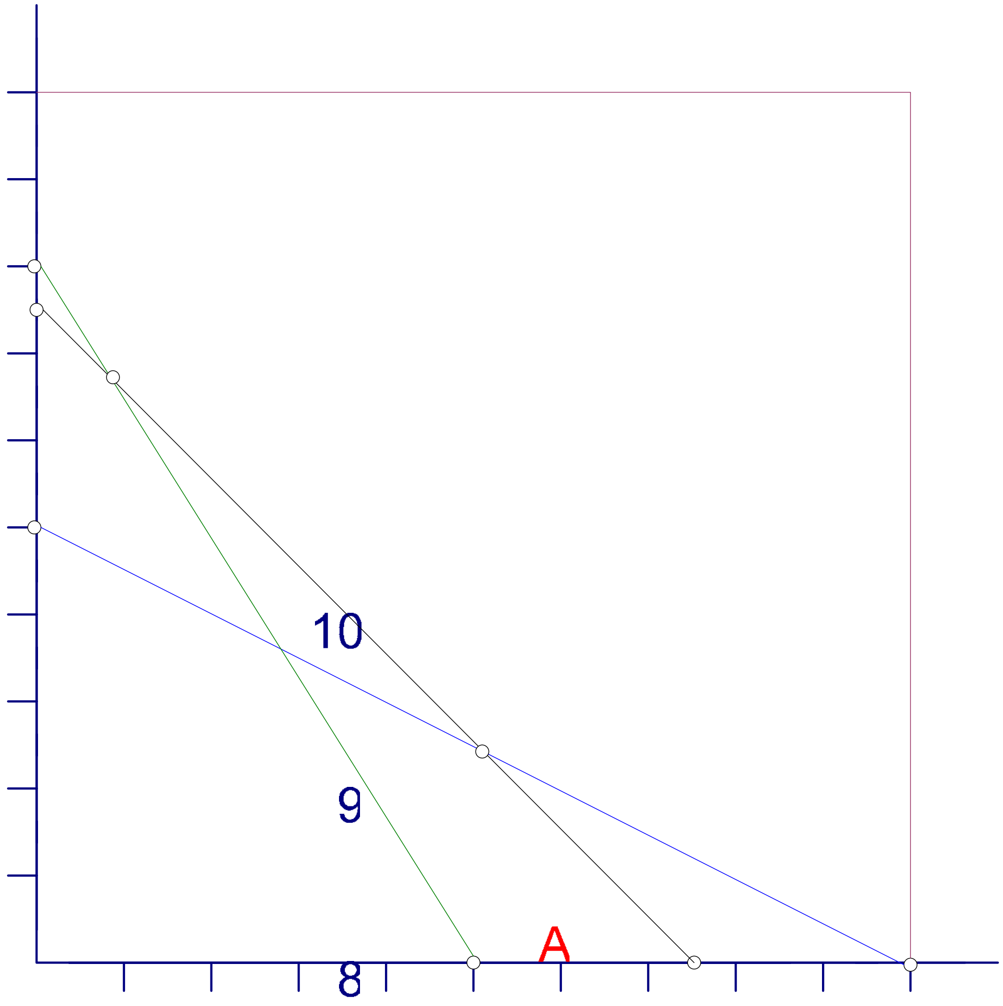
$$200x_1 + 200x_2 \geq 1500$$

Igualamos las restricciones y graficamos las rectas correspondientes

$100x_1 + 200x_2 = 1000$ **P₁**

$100x_1 + 200x_2 = 1000$	P_1 (10, 0) y P_2 (0, 5)
$400x_1 + 250x_2 = 2000$	P_3 (5, 0) y P_4 (0, 8)
$200x_1 + 200x_2 = 1500$	P_5 (7.5, 0) y P_6 (0, 7.5)

Identificamos el área de factibilidad



Evaluamos los vértices del polígono de factibilidad

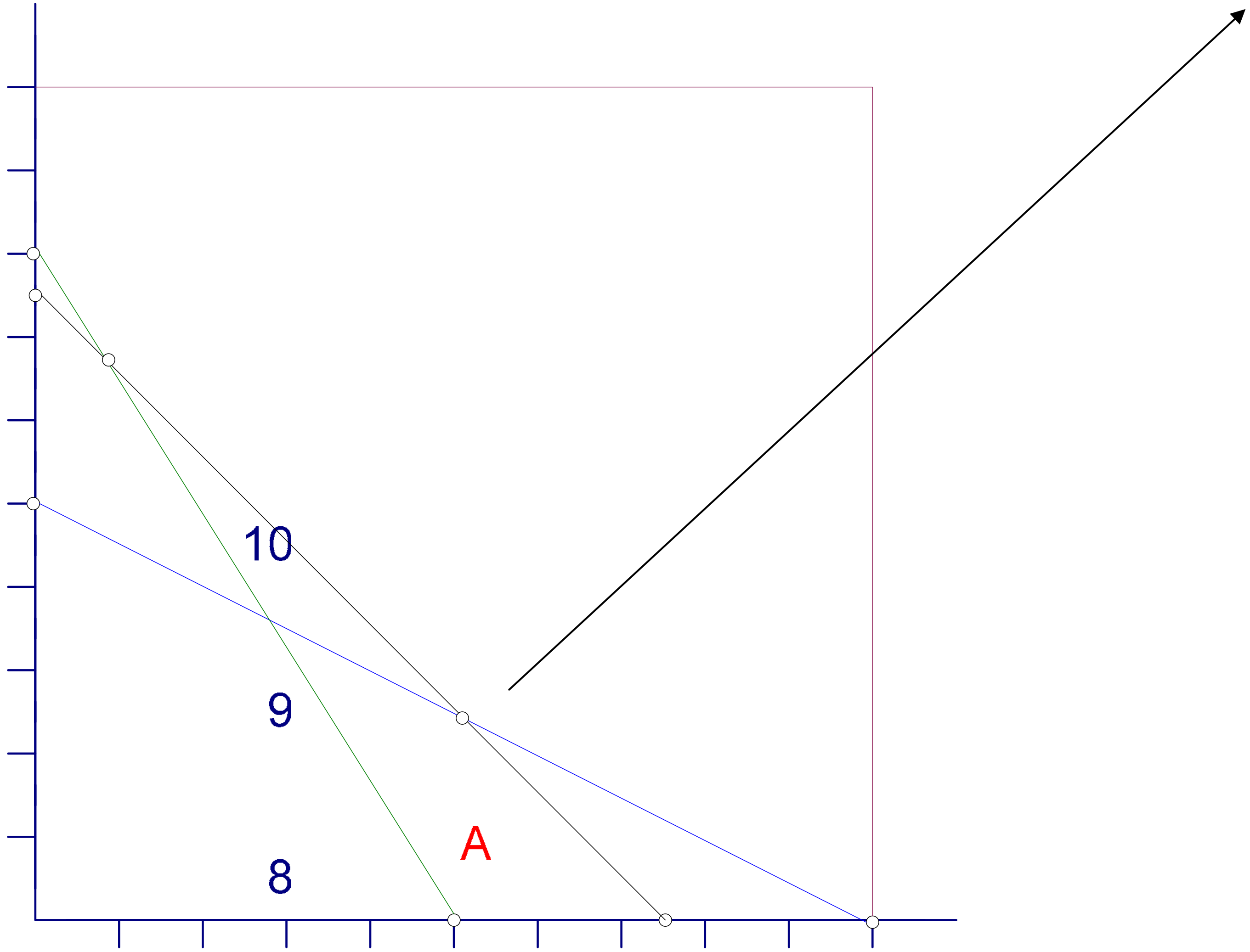
Puntos	x	y	$Z = 0.375x_1 + 0.05x_2$
A	0	8	4
B	0.83	6.6	3.61
C	5	2.5	3.12
D	10	0	3.75

A y D se obtienen directamente de la gráfica.

Calculamos los valores de B y C

Para el punto B	**Para el punto C**
$400x_1 + 250x_2 = 2000$	$100x_1 + 200x_2 = 1000$
$200x_1 + 200x_2 = 1500$	$200x_1 + 200x_2 = 1500$
$\dfrac{1500 - 200x_2}{200} = \dfrac{2000 - 250x_2}{400}$	$\dfrac{1000 - 200x_2}{100} = \dfrac{1500 - 200x_2}{200}$
$x_2 = 6.6$	$x_1 = 2.5$
$x_1 = 0.83$	$x_2 = 5$

Se toma el valor más pequeño en este caso es el de C con z = 3.12



Ejemplo. Dieta Marina

Minimización

Dieta Marina

- Un problema de minimización del costo de la dieta:
- Mezcle dos porciones de lo productos:
  Texfoods, Calration.
- Minimice el costo total de la mezcla.
- Mantenga los requerimientos mínimos
  de Vitamina A, Vitamina D, y hierro.

Variables de decisión:

x1 (X2) - - El cantidad de Texfoods (Calration) se usó en cada porción (cada 2 onzas).

- El modelo

minimizar $0.60X1 + 0.50X2$

Costo por 2 oz.

sujeto a

$20X1 + 50X2 \geq 100$

$25X1 + 25X2 \geq 100$ Vitamina D

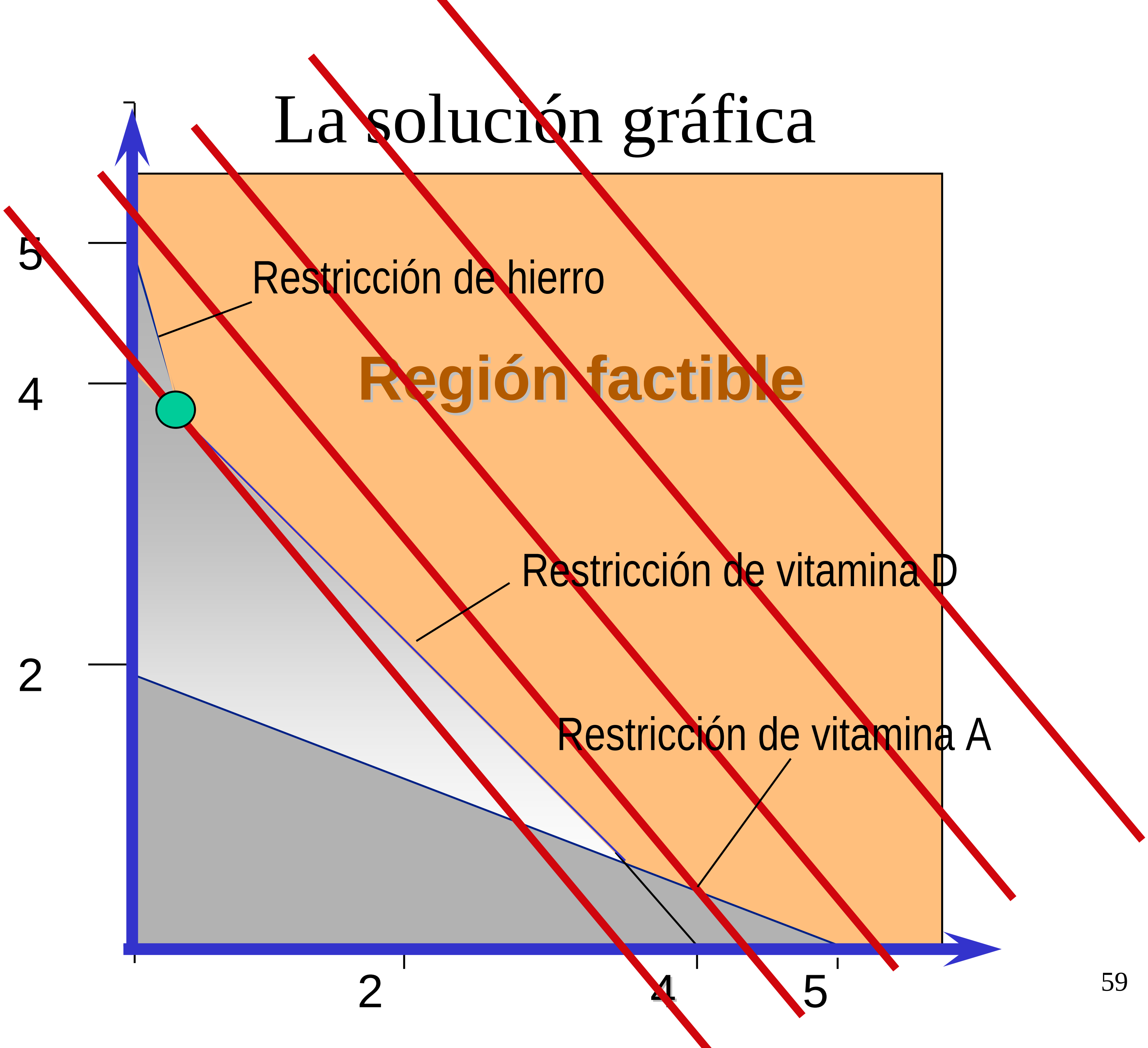
$50X1 + 10X2 \geq 100$ hierro

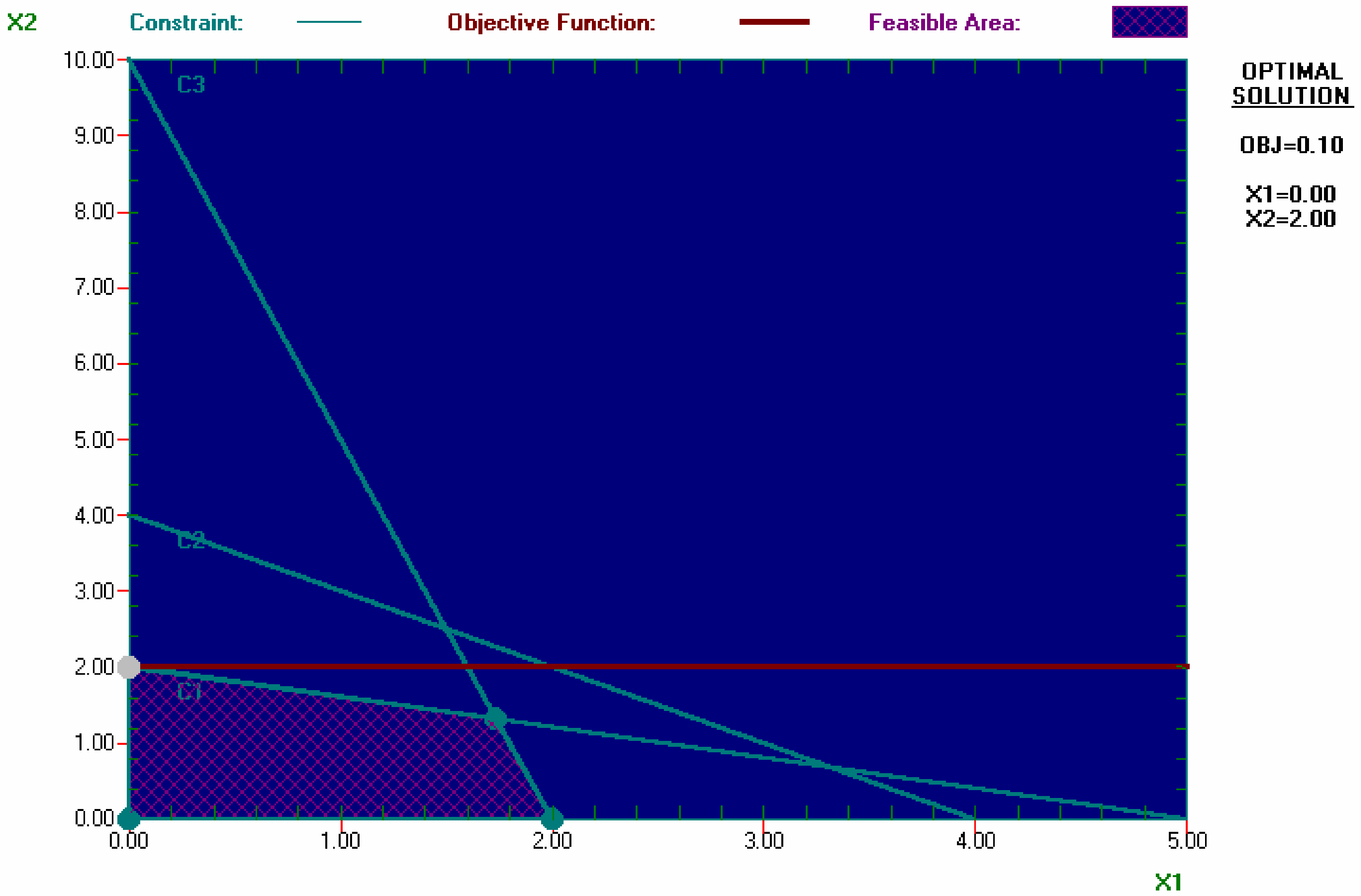
$X1, X2 \geq 0$

% Vitamina A por 2 oz.

% requerido

La solución gráfica





X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
C3
C2
C1
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
X1
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=0.10
X1=0.00
X2=2.00

Resumen de la solución óptima

- Producto Texfood = repartir 1.5 (= 3 onzas)
- Producto Calration = repartir 2.5 (= 5 onzas)
- Costo =$ 2.15 por porción servidar.
- El requisito mínimo para la Vitamina D y el hierro no se encuentren en superávit.
- La mezcla provee 155% del requerimiento para Vitamina A.

Modelo sin solución óptima

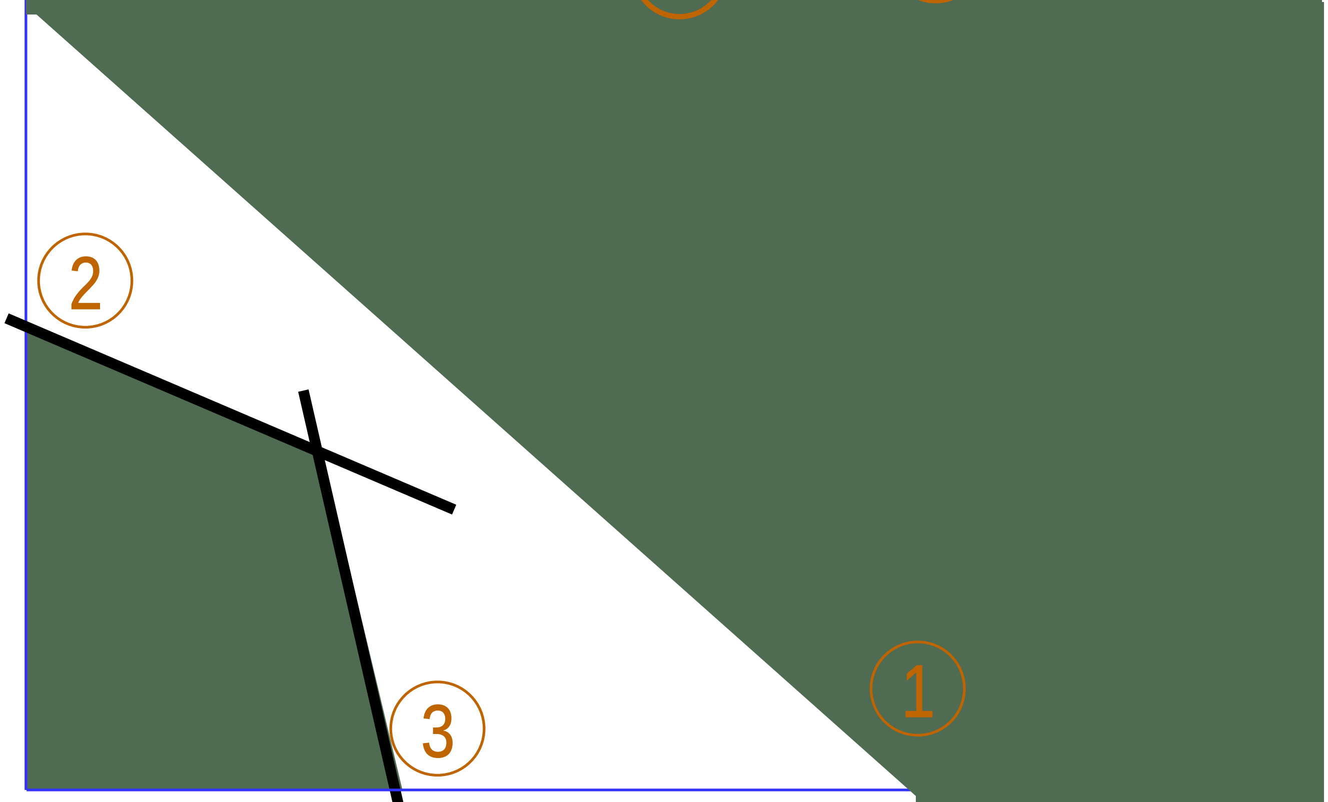
Modelo sin solución óptima

- No factible: Ocurre cuando en el modelo no hay ningún punto de factible.

- No acotado: Ocurre cuando el objetivo puede crecer infinitamente (objetivo a maximizar).

Infactibilidad

Ningún punto se encuentra, simultáneamente, sobre la línea 1 la línea 2 y 3



Solución No Acotada