MÉTODO SIMPLEX MÉTODO DE SOLUCIÓN GRÁFICO

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Fábrica de pinturas

Maximización

Construcción del modelo de programación Lineal

Una compañía de Pinturas produce esmaltes para interiores y para exteriores, a partir de dos materias primas, M1 y M2. La siguiente tabla proporciona los datos básicos del problema:

	Toneladas de materia prima por tn. de		Disponibilidad máxima diaria [tn]
	Pintura para exteriores	Pintura para interiores	
Materia Prima M1	6	4	24
Materia Prima M2	1	2	6
Utilidad por tonelada [K $]	5	4	

Una encuesta de mercado restringe la demanda máxima diaria de pintura para interiores a 2 toneladas. Además, la demanda diaria de pintura para interiores no puede exceder a la de pintura para exteriores por más de 1 tonelada. La empresa quiere determinar la mezcla de producto óptima (mejor) de pinturas para interiores y para exteriores que maximice la utilidad diaria total.

El modelo de PL, lo mismo que en cualquier modelo de I.O., incluye tres elementos básicos:

1. **Variables de decisión que tratamos de determinar**
2. **Objetivo (meta) que tratamos de optimizar**
3. **Restricciones que necesitamos satisfacer**

La definición apropiada de las variables de decisión es un primer paso esencial hacia el desarrollo del modelo. Una vez que se definen las variables, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones no debe ser muy difícil.

Para el problema de fabrica de pinturas, necesitamos determinar las cantidades que se van a producir de pintura para interiores y para exteriores.
Por consiguiente, las variables del modelo se definen como

$\mathbf{X_1}$ = Toneladas diarias producidas de pintura para **exteriores**
$\mathbf{X_2}$ = Toneladas diarias producidas de pintura para **interiores**

Utilizando estas definiciones, la siguiente tarea es construir la función objetivo. Un objetivo lógico para la compañía es incrementar tanto como sea posible (es decir, maximizar) la utilidad total diaria de la pintura, tanto para exteriores como para interiores. Si **Z** representa la utilidad diaria total (en miles de dólares), obtenemos

$$Z = 5\,X_1 + 4\,X_2$$

El objetivo de la compañía es → Maximizar $Z = 5\,X_1 + 4\,X_2$

El último elemento del modelo aborda las restricciones que limitan el empleo y la demanda de materia prima. Las restricciones de la materia prima se expresan verbalmente como

Empleo de materia prima para ambas pinturas	≤	Disponibilidad máxima de materia prima

De los datos del problema resulta que

Empleo de materia prima **M1 =** $6\,X_1 + 4\,X_2$ [toneladas]

Empleo de materia prima **M2 =** $1\,X_1 + 2\,X_2$ [toneladas]

Debido a que las disponibilidades diarias de la materia prima Ml y M2 están limitadas a 24 y 6 toneladas, respectivamente, las restricciones asociadas se expresan como:

$$6\,X_1 + 4\,X_2 \leq 24 \text{ (Materia prima M1)}$$

$$X_1 + 2\,X_2 \leq 6 \text{ (Materia prima M2)}$$

Hay dos tipos de restricciones de la demanda según indica el enunciado:

(1) la demanda máxima diaria de la pintura para interiores se limita a 2 toneladas y

(2) el exceso de producción diaria de pintura para interiores sobre la pintura para exteriores es cuanto mucho de 1 tonelada. La primera restricción es directa y se expresa como $X_2 \leq 2$. La segunda restricción se puede traducir para expresar que la diferencia entre la producción diaria de pinturas para interiores y para exteriores, $X_2 - X_1$, no exceda de 1 tonelada, es decir $X_2 - X_1 \leq 1$.

Una restricción implícita (o "que se entiende como tal") sobre el modelo, es que las variables X_1 y x2 no deben ser negativas. Por tanto, añadimos las **restricciones de no negatividad**,

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$; para satisfacer este requerimiento.

El modelo completo se escribe como

Maximizar $Z = 5 X_1 + 4 X_2$ sujeta a

$$6 X_1 + 4 X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 6$$

$$- X_1 + X_2 \leq 1.$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

El procedimiento gráfico incluye dos pasos básicos:

1.- La determinación del espacio de solución que define las soluciones factibles que satisfacen todas las restricciones del modelo.

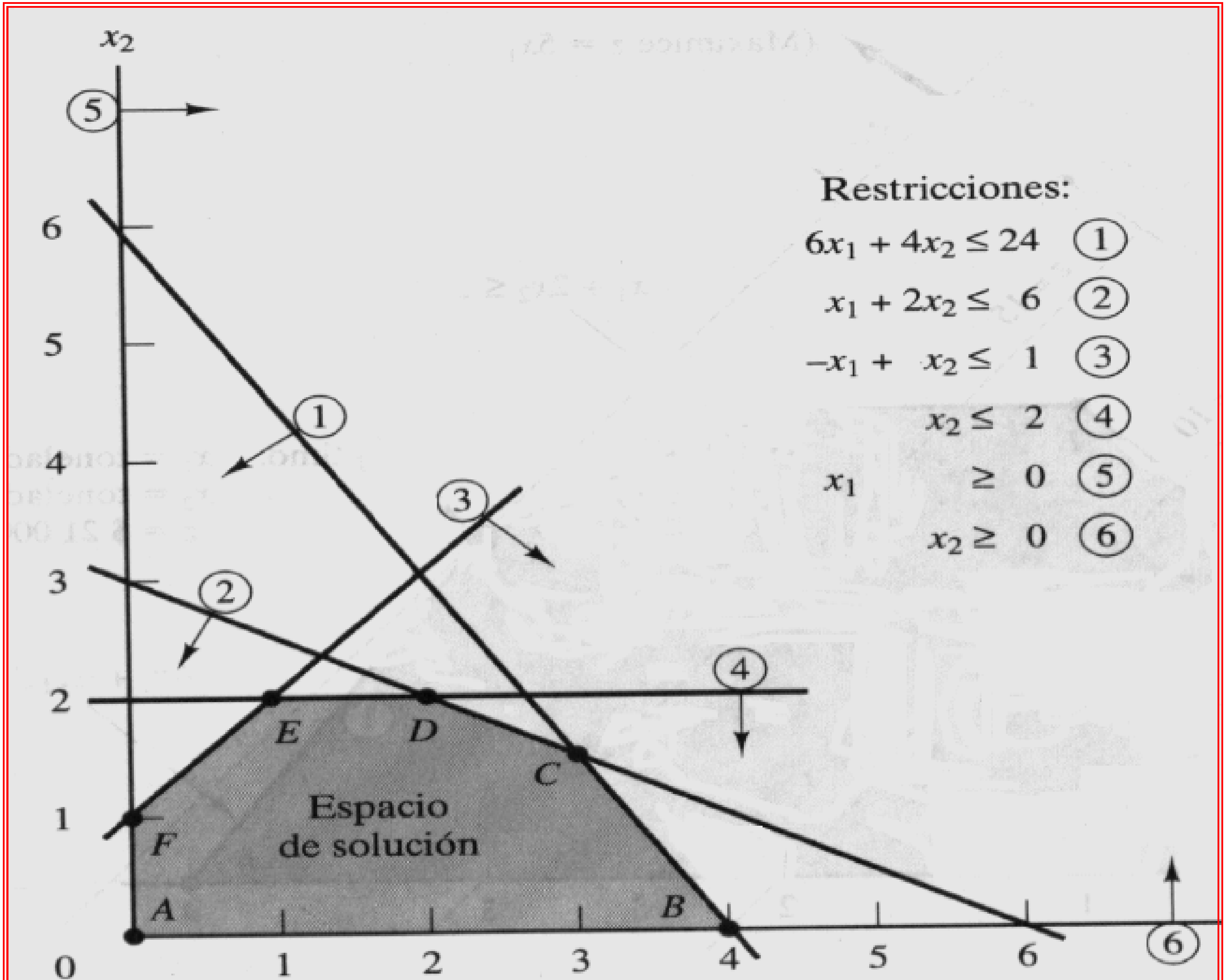
2.- La determinación de la solución óptima de entre todos los puntos en el espacio de solución factible.

El procedimiento se describe tanto para una función de objetivo de maximización, como de minimización.

Solución de un modelo de maximización

Paso 1. Determinación del espacio de solución factible.

Primero, como se muestra en la figura, supongamos que el eje horizontal x_1 y el eje vertical x_2 representan las variables de la pintura para exteriores y de la pintura para interiores, respectivamente. Después, consideremos las restricciones de no $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$. Estas dos restricciones limitan el área del espacio de solución al primer cuadrante (que se encuentra arriba del eje x_1 y a la derecha del eje x_2). **Figura 1.**



x_2
Restricciones:
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (1)
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (2)
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (3)
$x_2 \leq 2$ (4)
$x_1 \geq 0$ (5)
$x_2 \geq 0$ (6)
Espacio de solución
A B C D E F
0 1 2 3 4 5 6

La forma más sencilla de explicar las cuatro restricciones restantes es reemplazar las desigualdades con ecuaciones y después trazar las líneas rectas resultantes. Por ejemplo, la desigualdad $6x_1 + 4x_2 = 24$ se reemplaza con la línea recta $6x_1 + 4x_2 = 24$. Para trazar esta línea, necesitamos dos puntos precisos, que se pueden obtener determinando primero $x_1=0$ para obtener $x_2= 24/4 = 6$, y después determinando $x_2 = 0$ para obtener $x_1 = 24/6 = 4$.
Por consiguiente, la línea pasa a través de los dos puntos (0,6) y (4,0), como lo muestra la línea (1) en la figura 1.

Después consideramos el efecto de la desigualdad. Todo lo que hace la desigualdad es dividir el plano (X_1, X_2) en dos espacios (mitades) que ocurren en ambos lados de la línea trazada; un lado satisface la desigualdad y el otro no. Un procedimiento para determinar el lado factible es utilizar el origen (0,0) como un punto de referencia. Por ejemplo, para la primera restricción, (0,0) satisface $6 X_1 + 4 X_2 = 24$ (es decir, 6 * 0 + 4 * 0 = 0, que es menor de 24). Esto significa que el lado factible de la restricción 6x1 + 4x2 = 24 incluye el origen. Este resultado se muestra por la flecha direccional asociada con la restricción (1) en la figura 1.

En general, si el origen no satisface la desigualdad, entonces la flecha direccional debe apuntar en el lado opuesto de (0,0). Además, si sucede que la línea atraviesa el origen, entonces podemos elegir otro punto de referencia para efectuar el resultado deseado.

Paso 2. Determinación de la Solución óptima:

La figura 1 proporciona el espacio de solución factible que satisfacen todas las restricciones del modelo. Este espacio está delineado por los segmentos de la línea que une a los puntos en las esquinas A, B, C, D, E y F. Cualquier punte dentro o en el límite del espacio ABCDEF es un punto factible, en el sentido de que satisface todas las restricciones. Debido a que el espacio factible ABCDEF consiste en un número infinito de puntos, necesitamos un procedimiento que identifique la solución óptima.

La determinación de la solución óptima requiere la identificación de la dirección en la cual incrementa la función de la utilidad $z = 5\ X_1 + 4\ X_2$ (recuerde que estamos maximizando Z).

Lo podemos hacer asignándole a z los valores arbitrariamente crecientes de 10 y 15, que serían equivalentes a trazar las líneas $5\ X_1 + 4\ X_2 = 10$ y $5\ X_1 + 4\ X_2 = 15$. La figura 2 superpone estas dos líneas en el espacio de solución del modelo. De esta manera, la utilidad Z se incrementa en la dirección que se muestra en la figura, hasta que lleguemos al punto en el espacio de solución más allá del cual cualquier incremento adicional nos dejará fuera de los limites de ABCDEF. Dicho punto es el óptimo.

En términos de la figura 2, el punto C da la solución óptima. De manera que los valores de X_1 y X_2 se determinan resolviendo las ecuaciones asociadas con las líneas (1) y (2); es decir,

$$\begin{cases} 6.x_1+4.x_2=24 & (1) \\ 1.x_1+2.x_2=6 & (2) \end{cases}$$

despejando X_1 y sustituyendo en 2 obtenemos la solución

La solución produce X_1 =3 y X_2 = 1,5, con Z =5 * 3 + 4 * 1,5 = 21. Esto quiere decir que la mezcla óptima diaria del producto de 3 toneladas de pintura para exteriores y 1,5 toneladas de pintura para interiores producirá una utilidad diaria de 21000 dólares.

No es accidental que la solución óptima esté asociada con un **punto de esquina** (vértice) del espacio de solución en donde se intersecan dos líneas. De hecho, si cambiamos **la pendiente** de la función de utilidad z (cambiando sus coeficientes), descubriremos que la solución óptima siempre está identificada por uno de estos puntos de esquina. Esta observación es la idea clave para el desarrollo del algoritmo Simplex general, que presentaremos mas adelante.

Análisis de soluciones sub.-óptimas.

Maximizar $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$

A (0,0) ➔ $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$ ➔ Z = 0.

B (4,0) ➔ $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$ ➔ Z = 20.

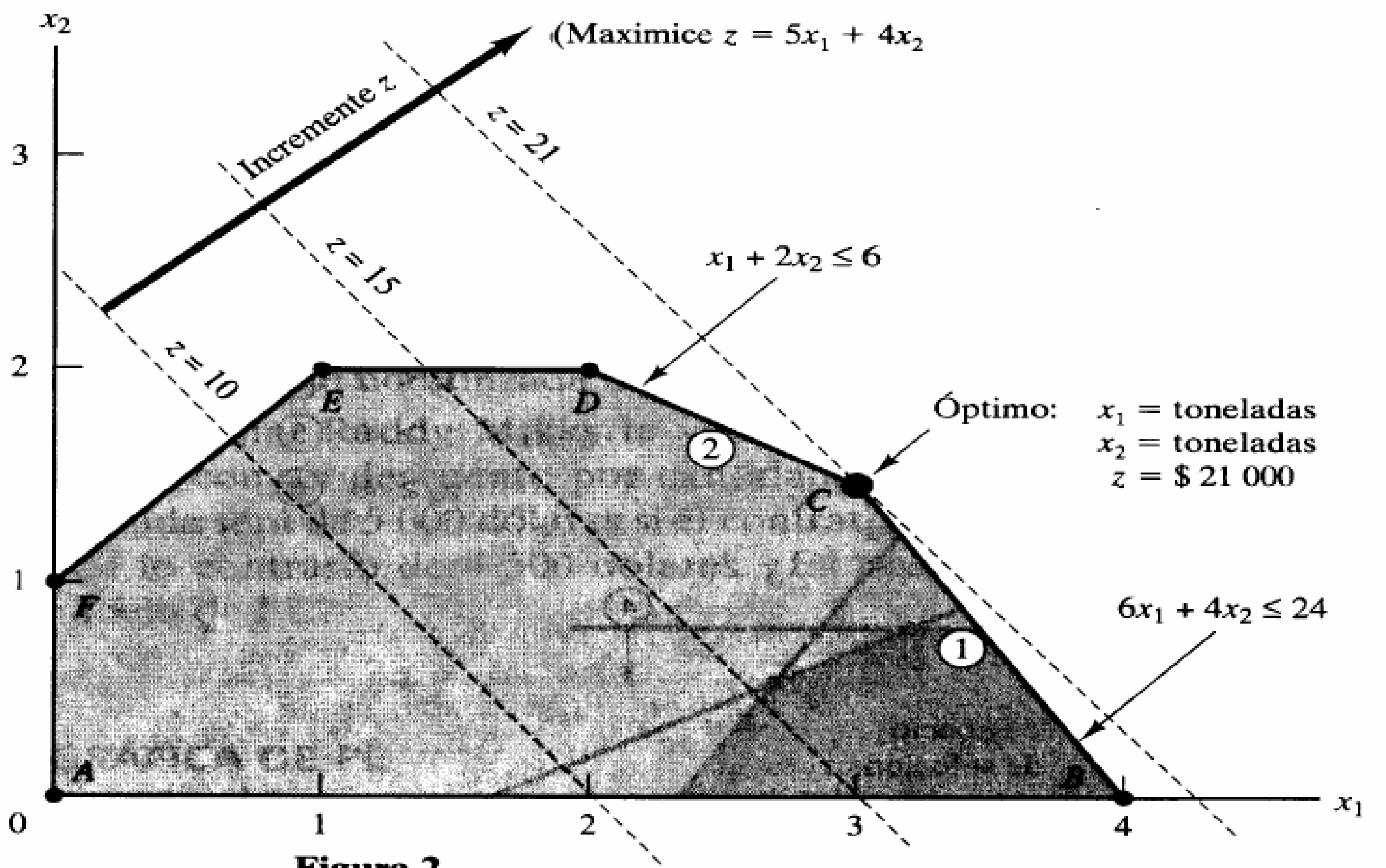
C (3, 1.5) ➔ $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$ ➔ Z = 21. SOLUCIÓN ÓPTIMA.

D (2,2) ➔ $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$ ➔ Z = 18.

E (1,2) ➔ $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$ ➔ Z = 13.

F (0,1) ➔ $\mathbf{Z = 5\, X_1 + 4\, X_2}$ ➔ Z = 4.

Con lo que verificamos que los vértices nos dan soluciones básicas factibles, con sólo uno de ellos dando la solución básica factible OPTIMA.



(Maximice $z = 5x_1 + 4x_2$
Incremente z
$z = 21$
$z = 15$
$z = 10$
$x_1 + 2x_2 \le 6$
Óptimo: x_1 = toneladas
x_2 = toneladas
z = \$ 21 000
$6x_1 + 4x_2 \le 24$
A
B
C
D
E
F
1
2
x_1
x_2
0
1
2
3
4

Figura 2

El problema de la dieta

Minimización

Ozark Farms utiliza diariamente por lo menos 800 kgs. de alimento especial. El alimento especial es una mezcla de maíz y semilla de soja, con las siguientes composiciones:

Libra por libra de alimento para ganado			
Alimento para ganado	Proteínas	Fibra	Costo ($/Kg.)
Maíz	0.09	0.02	0.30
Semilla de soja	0.60	0.06	0.90

Los requerimientos dietéticos diarios del alimento especial estipulan por lo menos un 30% de proteínas y cuanto mucho un 5% de fibra. Ozark Farms desea determinar el costo mínimo diario de la mezcla de alimento.
Debido a que la mezcla de alimento consiste de maíz y semilla de soja, las variables de decisión del modelo se definen como

X_1 = Kgs. de maíz en la mezcla diaria
X_2 = Kgs. de semilla de soja en la mezcla diaria

La función objetivo trata de minimizar el costo diario total (en dólares) de la mezcla de alimento y se expresa como

$$\text{Minimice } Z = 0.3\,\mathbf{X_1} + 0.9\,\mathbf{X_2}$$

Las restricciones del modelo deben reflejar la cantidad diaria necesaria y los requerimientos dietéticos. Debido a que Ozark Farms necesita 800 Kg. de alimento al día, la restricción asociada se puede expresar como

$$\mathbf{X_1 + X_2 \geq 800} \qquad \text{(al menos)}$$

La restricción del requerimiento dietético de proteínas se desarrolla después. La cantidad de proteínas incluida en x_1 Kgs. de maíz y x_2 Kg. de semilla de soja es $(0.09x_1 + 0.6x_1)$ Kg. Esta cantidad debe ser igual por lo menos a 30% de la mezcla total de alimento $(x_1 + x_2)$ Kg., lo que por tanto nos da

$$0.09\,\mathbf{X_1} + 0.6\,\mathbf{X_2} \geq 0.3(\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2})$$

De manera similar, la restricción de fibras se construye como

$$0.02\,\mathbf{X_1} + 0.06\,\mathbf{X_2} \leq 0.05(\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2})$$

Las restricciones anteriores se simplifican agrupando todos los coeficientes de x_1 y x_2 en el lado izquierdo de cada desigualdad. De manera que el modelo completo se convierte en

Minimice Z = 0.3 x1 + 0.9 x2

sujeta a

$$X_1 + X_2 \geq 800$$

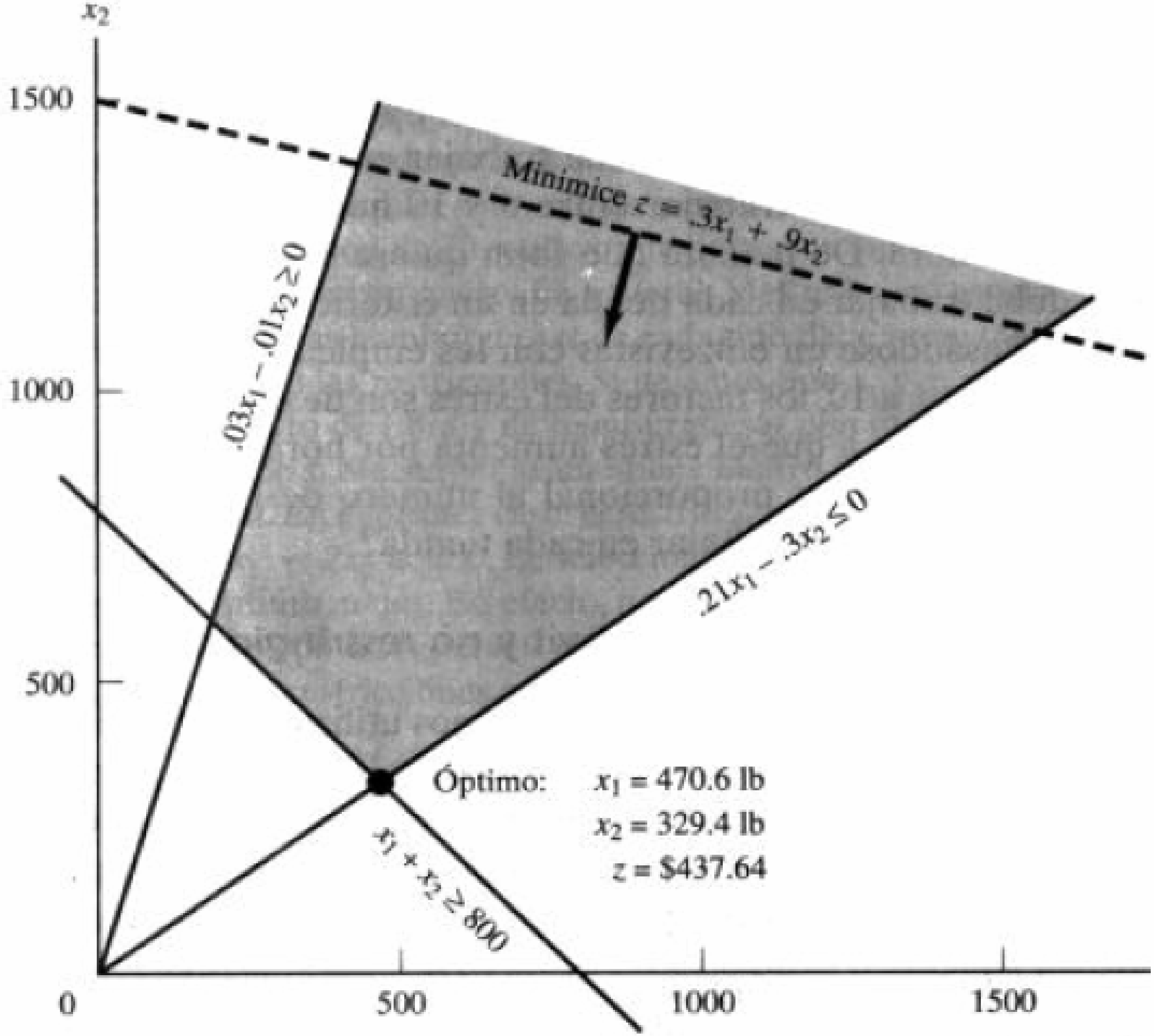
$$0.21\, X_1 - 0.30\, X_2 \leq 0$$

$$0.03\, X_1 + 0.01\, X_2 \geq 0$$

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

La figura 3 proporciona la solución gráfica del modelo. A diferencia de las del modelo de La fábrica de pinturas (ejemplo 1), dos de las restricciones atraviesan el origen. Para trazar cada una de las líneas rectas asociadas, necesitamos un punto adicional, que se obtiene asignándole a una de las variables un valor y después resolviendo la otra variable. Por ejemplo, X_1=200 daría 0.21* 200 - 0.3 X_2 = 0, ó X_2 = 140. Esto significa que la línea recta 0.21 X_1 - 0.3 X_2 = 0 atraviesa (0,0) y (200, 140). Observe también que la dirección de factibilidad para las dos restricciones que atraviesan el origen se pueden determinar utilizando un punto de referencia que no sea (0,0); por ejemplo, es posible utilizar ya sea (100,0) o (0,100) como un punto de referencia para la segunda y la tercera restricciones.

Debido a que este modelo busca la **minimización** de **la función del objetivo**, necesitamos reducir el valor de Z tanto como sea posible en la dirección que muestra la flecha en la figura 3. La solución óptima es la intersección de las dos líneas X_1 + X_2 = 800 y 0.21 X_1- 0.3 X_2= 0, que da X_1= 470.59 Kgs. y X_2 = 329.41 Kgs.. El costo mínimo asociado de la mezcla de alimento es Z = 0.3 * 470.59 + 0.9 * 329.42 = $437.65 por día.



x_2
1500
1000
500
0
500
1000
1500
Minimice $z = .3x_1 + .9x_2$
$.03x_1 - .01x_2 \geq 0$
$.21x_1 - .3x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \geq 800$
Óptimo: $x_1 = 470.6$ lb
$x_2 = 329.4$ lb
$z = \$437.64$

Figura 3

Ejemplo. Breeding Manufacturing Inc.

Mezcla de productos

Para el problema su modelo de programación lineal es:

MAXIMIZAR: $Z = 50x1 + 75x2$

SUJETO A:

$3.6X1 + 4.8\ X2 <= 4800$

$1.6X1 + 1.8\ X2 <= 1980$

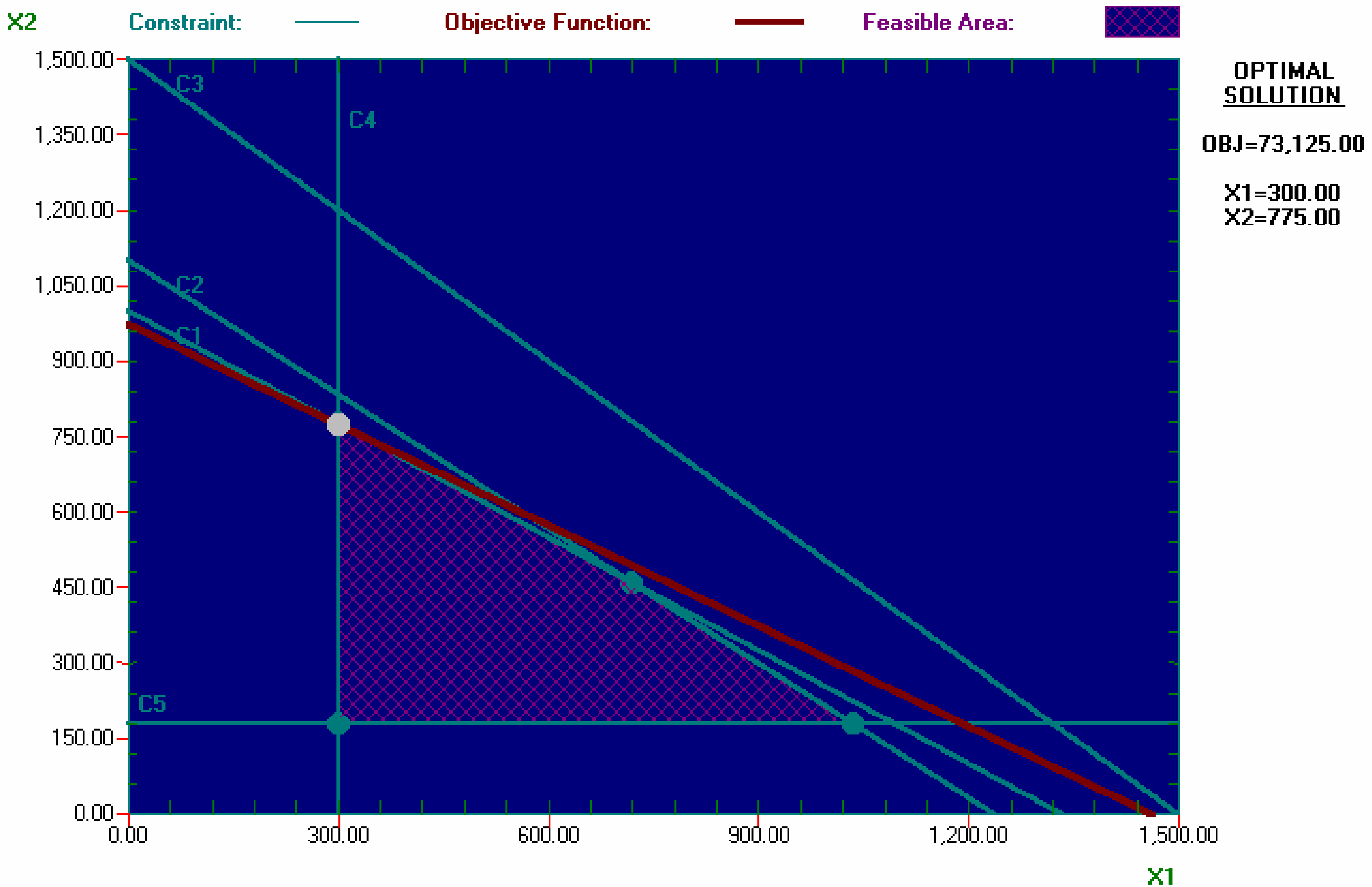
$0.6X1 + 0.6x2 <= 900$

$X1 >= 300$

$X2 >= 180$

$x1, x2 >= 0$

Resuélvalo por el método gráfico



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
1,500.00
1,350.00
1,200.00
1,050.00
900.00
750.00
600.00
450.00
300.00
150.00
0.00
C3
C4
C2
C1
C5
0.00
300.00
600.00
900.00
1,200.00
1,500.00
X1
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=73,125.00
X1=300.00
X2=775.00

Ejemplo. Protac

Programación de máquinas

Para el problema su modelo de programación lineal es:

Max Z=5000x1+4000x2

$$10x_1 + 15x_2 \leq 150$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 160$$

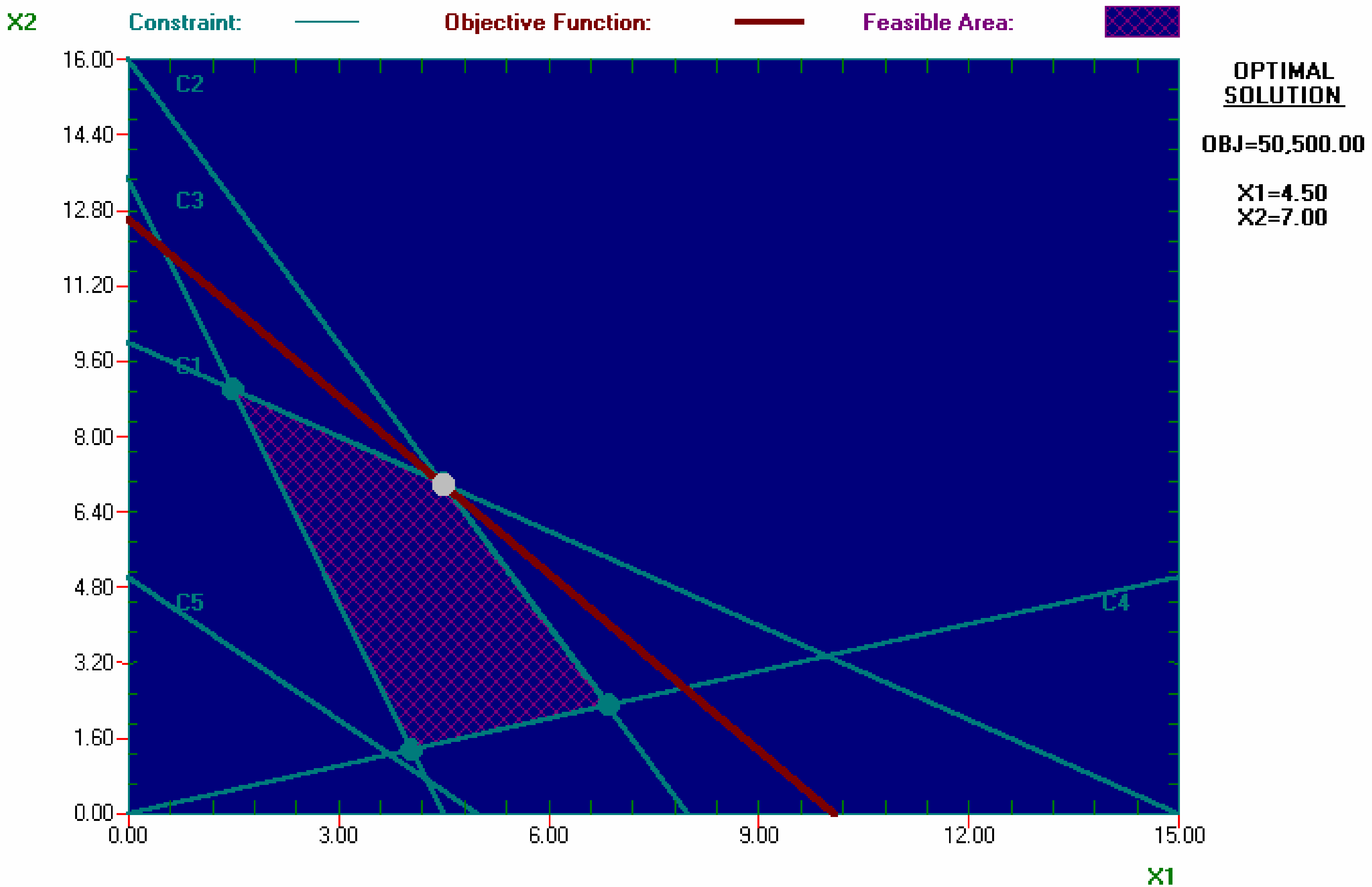
$$30x_1 + 10x_2 \geq 135$$

$$3x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Resuélvalo por el método gráfico



X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
16.00
14.40
12.80
11.20
9.60
8.00
6.40
4.80
3.20
1.60
0.00
3.00
6.00
9.00
12.00
15.00
C1
C2
C3
C4
C5
X1
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=50,500.00
X1=4.50
X2=7.00

Ejemplo. La empresa High Tech Co.

Asignación de recursos limitados

Para el problema su modelo de programación lineal es:

Maximizar $Z = 50X_1 + 40X_2$

Max $Z = 50X_1 + 40X_2$

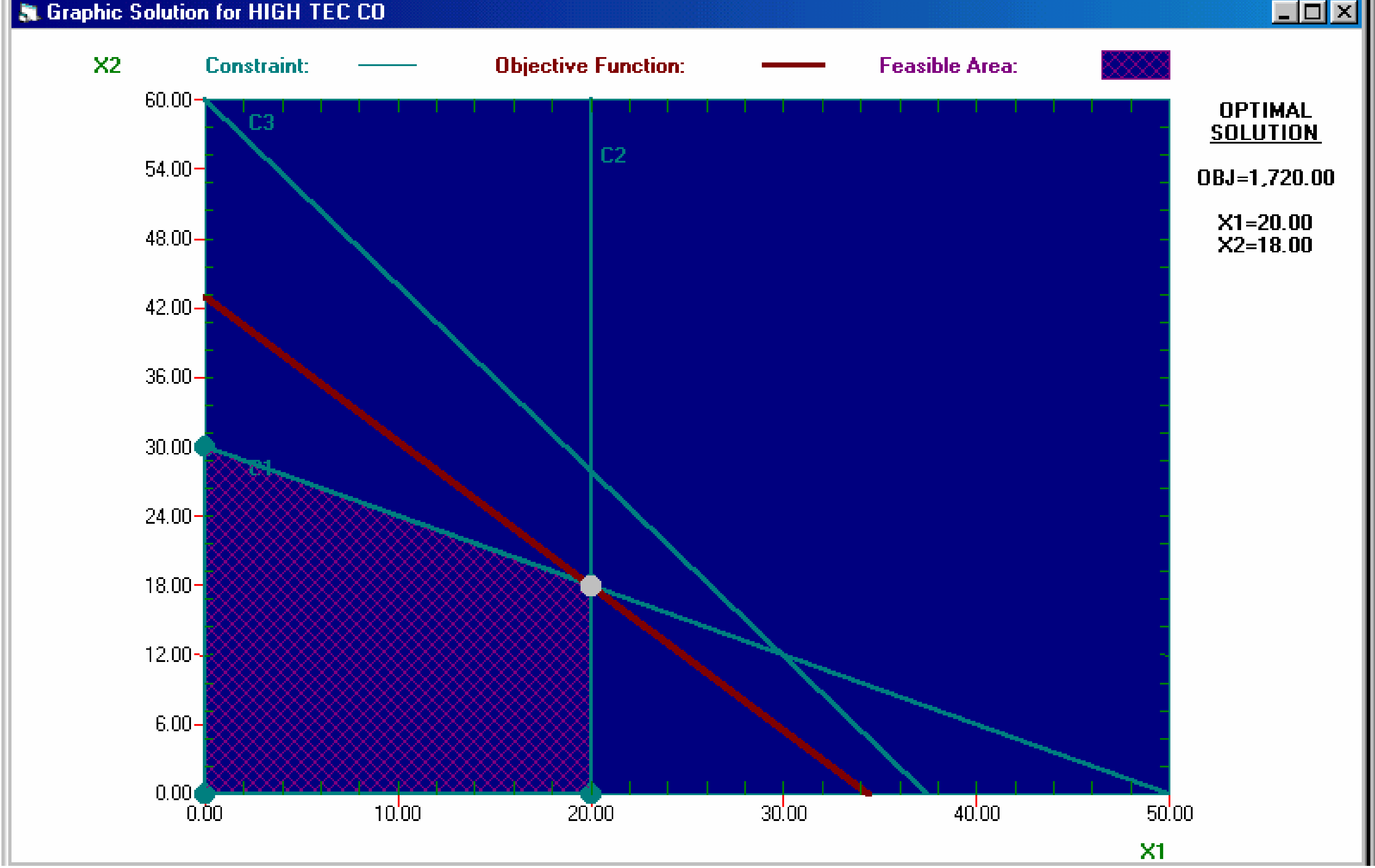
Sujeta a: $3X_1 + 5X_2 \leq 150$ tiempo de ensamble.

$X_2 \leq 20$ monitores para HTPC

$8X_1 + 5X_2 \leq 300$ espacio para almacenar.

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resuélvalo por el método gráfico


Graphic Solution for HIGH TEC CO
X2
Constraint:
Objective Function:
Feasible Area:
C3
C2
C1
60.00
54.00
48.00
42.00
36.00
30.00
24.00
18.00
12.00
6.00
0.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
X1
OPTIMAL SOLUTION
OBJ=1,720.00
X1=20.00
X2=18.00