EL MÉTODO SIMPLEX ALGEBRAICO

M. En C. Eduardo Bustos Farías

EL METODO SIMPLEX

- Es un procedimiento general para resolver problemas de programación lineal.
- Fue desarrollado en el año de 1947 por *George Dantzig*.
- Exceptuando los casos más pequeños y sencillos, su ejecución se lleva a cabo en las computadoras a través de programas desarrollados con ese propósito particular.

EL METODO SIMPLEX

- Es un algoritmo sistemático que examina las vértices, esquinas o puntos extremos (cuando el problema se puede representar geométricamente) o de un conjunto factible en busca de una solución optima.
- El algoritmo arranca en la fase 1 determinando un vértice inicial.
- Si el problema es inconsistente en esta fase 1 se descubrirá este hecho.
- En la siguiente iteración el algoritmo empieza a recorrer el conjunto factible de un vértice a otro adyacente.
- Cada vértice del conjunto factible puede representarse en forma algebraica como una clave particular de solución de un conjunto de ecuaciones lineales.

- Los problemas de PL que solo incluyen dos variables y en ocasiones tres resultan susceptibles de solucionarse en forma gráfica, sin embargo al volverse más complicados la solución gráfica resulta imposible.
- Por lo tanto se requiere una forma más eficiente que mantenga los cálculos al mínimo, esto lo hace el método **simplex** con el procedimiento algebraico.
- El procedimiento algebraico al igual que el gráfico, consiste en resolver puntos seleccionados del polígono de factibilidad técnica y llega a la solución óptima por medio de iteraciones o pasos sucesivos.

EL MÉTODO SIMPLEX

INICIA: Con una solución básica y factible, pero no óptima.

BUSCA: La optimalidad

TERMINA: Con una solución que conserva la factibilidad y, además, es óptima.

TIPOS DE SOLUCIONES:

1. SOLUCIÓN: Cualquier conjunto de valores para las variables.
2. SOLUCIÓN ÓPTIMA: Es una solución factible que maximiza o minimiza el valor de la función objetivo.
3. SOLUCIÓN FACTIBLE: Es una solución que satisface a todas las restricciones.
4. SOLUCIÓN BÁSICA: Dado un programa lineal en forma estándar, con n variables y m restricciones se obtiene una solución básica igualando a 0 n-m de las variables y resolviendo las ecuaciones de restricción para encontrar los valores de las otras m variables.
5. SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE: Es una solución básica que también es factible; es decir que incluso satisface las condiciones de no- negatividad. Una solución básica factible corresponde a un punto extremo.

Ecuaciones en forma estándar

- Cualquier programa lineal, sin importar el sentido de sus restricciones se puede transformar en un problema equivalente, en que todas las restricciones sean igualdades.
- Esto se efectúa agregando variables de holgura y excedente.
- Por ejemplo: $X1+X2<=5$, se transforma en igualdad al agregarle la variable de **holgura** s1:

  $X1+X2+S1=5$
- Vemos que S1 es el faltante para alcanzar la igualdad.
- Si ahora el caso es $2X1+4X2>=13$, para transformarla en igualdad se requiere de una variable de **excedente** y queda:

  $2X1+4X2-S2=13$
- Vemos que S2 es el exceso para alcanzar la igualdad.

Ejemplo

Maximizar $Z=18.5\ X_1 + 20\ X_2$

Sujeto a

$0.05\ X_1 + 0.05\ X_2 <= 1100$

$0.05\ X_1 + 0.10\ X_2 <= 1800$

$0.10\ X_1 + 0.05\ X_2 <= 2000$

$X_1, X_2 >= 0$

Conversión a la forma estándar (inecuación a ecuación):

$Z=18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3$

Sujeto a

$0.05\ X1\ +0.05\ X2+S1=1100$

$0.05\ X1\ +0.10\ X2+S2=1800$

$0.10\ X1\ +0.05\ X2+S3=2000$

$X1,\ X2,\ S1,\ S2,\ S3 = 0$

Ejemplo 1. Tecnología Agrícola, S.A.

Maximización

Tecnología Agrícola, S.A. es una compañía fabricante de fertilizantes. El gerente desea planear la combinación de sus dos mezclas a fin de obtener las mayores utilidades. Las mezclas son

Fertilizante tipo	Nitrato	Fosfato	Potasio	Barro
5-5-10	5	5	10	80
5-10-5	5	10	5	80

El mayorista comprará cualquier cantidad de ambas mezclas de fertilizante que la compañía pueda fabricar. Está dispuesto a pagar a $71.50 la tonelada de **5-5-10** y a $69 la tonelada de **5-10-5.**

En este mes la disponibilidad y costos de materias primas son:

	Nitrato	Fosfato	Potasio	Barro
Cantidad (Toneladas)	1100	1800	2000	ilimitado
Costo por tonelada ($)	200	80	160	10

Hay un costo de $15 por tonelada por mezclado de los fertilizantes.

El modelo de programación lineal para este problema es:

Maximizar $Z=18.5\ X_1 + 20\ X_2$

Sujeto a

$0.05\ X_1 + 0.05\ X_2 <= 1100$

$0.05\ X_1 + 0.10\ X_2 <= 1800$

$0.10\ X_1 + 0.05\ X_2 <= 2000$

$X_1, X_2 >= 0$

Conversión a la forma estándar (inecuación a ecuación):

$Z = 18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3$

Sujeto a

$0.05\ X1 + 0.05\ X2 + S1 + 0S2 + 0S3 = 1100$

$0.05\ X1 + 0.10\ X2 + 0S1 + S2 + 0S3 = 1800$

$0.10\ X1 + 0.05\ X2 + 0S1 + 0S2 + S3 = 2000$

$X1, X2, S1, S2, S3 >= 0$

La tabla del simplex algebraico

Variables no básicas

Variables básicas

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	aij	aij	1	0	0	b1
S2	aij	aij	0	1	0	b2
S3	aij	aij	0	0	1	b3
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	C1	C2	0	0	0	

Zj= contribución que se pierde por unidad fabricada

Cj-Zj= costo de oportunidad

Si= variables de holgura

Xi= variables de decisión

Elaborar la tabla simplex que permita obtener la primera solución básica factible

Llenado de la tabla: Renglón S1

$Z = 18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3$

Sujeto a

$0.05\ X1 + 0.05\ X2+S1+0S2+0S3 = 1100$

$0.05\ X1 + 0.10\ X2+0S1+S2+0S3 = 1800$

$0.10\ X1 + 0.05\ X2+0S1+0S2+S3 = 2000$

$X1, X2, S1, S2, S3 >= 0$

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.5	1	0	0	1100
S2						
S3						
Zj						
Cj-Zj						

Llenado de la tabla: Renglón S2

$Z = 18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3$

Sujeto a

$0.05\ X1 +0.05\ X2+S1+0S2+0S3 =1100$

$0.05\ X1 +0.10\ X2+0S1+S2+0S3 = 1800$

$0.10\ X1 +0.05\ X2+0S1+0S2+S3 = 2000$

$X1, X2, S1, S2, S3 >=0$

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.5	1	0	0	1100
S2	0.05	0.1	0	1	0	1800
S3						
Zj						
Cj-Zj						

Llenado de la tabla: Renglón S3

$Z = 18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3$

Sujeto a

$0.05\ X1 +0.05\ X2+S1+0S2+0S3 =1100$

$0.05\ X1 +0.10\ X2+0S1+S2+0S3 = 1800$

$0.10\ X1 +0.05\ X2+0S1+0S2+S3 = 2000$

$X1, X2, S1, S2, S3 >=0$

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	**0.05**	**0.5**	**1**	**0**	**0**	**1100**
S2	**0.05**	**0.1**	**0**	**1**	**0**	**1800**
S3	**0.1**	**0.5**	**0**	**0**	**1**	**2000**
Zj						
Cj-Zj						

Llenado del Renglón Zj

$$Z = 18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3$$

Sujeto a

$$0.05\ X1 +0.05\ X2+S1+0S2+0S3 =1100$$

$$0.05\ X1 +0.10\ X2+0S1+S2+0S3 = 1800$$

$$0.10\ X1 +0.05\ X2+0S1+0S2+S3 = 2000$$

$$X1,\ X2,\ S1,\ S2,\ S3 >=0$$

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.5	1	0	0	1100
S2	0.05	0.1	0	1	0	1800
S3	0.1	0.5	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj						

Llenado de la tabla: Renglón Cj-Zj

Z = 18.5X1+20X2+0S1+0S2+0S3

Sujeto a

0.05 X1 +0.05 X2+S1+0S2+0S3 =1100

0.05 X1 +0.10 X2+0S1+S2+0S3 = 1800

0.10 X1 +0.05 X2+0S1+0S2+S3 = 2000

X1, X2, S1, S2, S3 >=0

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.5	1	0	0	1100
S2	0.05	0.1	0	1	0	1800
S3	0.1	0.5	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Determinar la variable que ingresa y la que la sale.

Regla de entrada (criterio de optimalidad):

Entra aquella variable no básica con la mayor ganancia unitaria (en el caso de MAX) o el menor costo unitario (en el caso de MIN).

En nuestro ejemplo: comparo los valores de la fila Cj-Zj, determino la columna pivote, entra X2 por que 20 es mayor que 18.5

Entra X2 a la base

PASO 1. Columna pivote

Entra X2 = 20 > x1 = 18.5

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
S2	0.05	0.1	0	1	0	1800
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Regla de salida (criterio de factibilidad):

Sale aquella variable cuyo resultado de dividir el valor solución entre el coeficiente de la columna pivote sea menor.

En nuestro ejemplo sale S2, ya que al dividir es el que tiene menor valor positivo (ceros y negativos no cuentan)

Sale S2 de la base: Divido la columna de valor solución entre X2 (la variable que entra a la base)

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución	
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100	1100/0.05=22000
S2	0.05	0.1	0	1	0	1800	1800/0.1=18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000	2000/0.05=40000
Zj	0	0	0	0	0	0	
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0		

Se identifica el elemento pivote: intersección entre x2 y s2 (la variable que sale y la que entra a la base)

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
X2	0.05	0.1	0	1	0	1800
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Sustituyo S2 por X2

Se reestructuran los valores de la tabla 1

Transformo el renglón X2, que contiene el elemento pivote en uno: lo multiplico por su inverso multiplicativo (10)

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
X2	10(0.05)	10(0.1)	10(0)	10(1)	10(0)	10(1800)
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Quedando la tabla como sigue:

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Los valores de las celdas de las variables básicas de la columna pivote (X2) deben valer cero y también la Cj-Zj:

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Uso el renglón pivote

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Empezamos con el renglón S1, quiero convertir el 0.05 en cero. Busco que número multiplicado por uno y sumado con 0.05 da cero.

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.05	0.05	1	0	0	1100
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Multiplico por -0.05 el renglón pivote y lo sumo al renglón S1

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	(0.5)(-0.05) + 0.05	(1)(-0.05) + 0.05	(0)(-0.05) + 1	(10)(-0.05) + 0	(0)(-0.05) + 0	(18000)(-0.05) + 1100
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Resultado los nuevos valores del renglón S1 en la Tabla 2 del simplex

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Ahora el renglón S3: quiero convertir en cero 0.05, busco qué número multiplicado por uno y sumado a 0.05 da cero.

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.1	0.05	0	0	1	2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Multiplico por el inverso aditivo de 0.05. Multiplico el renglón pivote por -0.05 y lo sumo al renglón S3

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	(0.5)(-0.05) + 0.1	(1)(-0.05) + 0.05	(0)(-0.05) + 0	(10)(-0.05) + 0	(0)(-0.05) + 1	(18000)(-0.05) + 2000
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Resultado

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Ahora vamos a transformar el renglón Zj. Multiplico el renglón pivote por 20 y lo sumo a Zj.

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Las operaciones son:

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	(0.5)(20) + 0	(1)(20) + 0	(0)(20) + 0	(10)(20) + 0	(0)(20) + 0	(18000)(20) + 0
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

El resultado es:

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Ahora seguimos con Cj-Zj, quiero convertir el 20 en cero.

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	18.5	20	0	0	0	

Multiplico el renglón pivote por -20 y lo sumo a Cj-Zj

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	(0.5)(-20) + 18.5	(1)(-20) + 20	(0)(-20) + 0	(10)(-20) + 0	(0)(-20) + 0	

Resultado

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Tabla 2 (Resumen)

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

La solución se puede mejorar ya que aún hay valores positivos en el renglón Cj-Zj de las variables no básicas.

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Determinar la variable que ingresa y la que la sale.

Regla de entrada (criterio de optimalidad):

Entra aquella variable no básica con la mayor ganancia unitaria (en el caso de MAX) o el menor costo unitario (en el caso de MIN).

En nuestro ejemplo: comparo los valores de la fila Cj-Zj, determino la columna pivote, entra X1 por que 8.5 es mayor que 0

Variable que entra a la base: X1

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Regla de salida (criterio de factibilidad):

Sale aquella variable cuyo resultado de dividir el valor solución entre el coeficiente de la columna pivote sea menor.

En nuestro ejemplo sale S1, ya que al dividir es el que tiene menor valor positivo (ceros y negativos no cuentan)

Variable que sale de la base S1: divido la columna de valor solución entre X1

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

200/0.025=8000

18000/0.5=36000

1100/0.075=14666.6

Identifico el elemento pivote: la intersección de variable que entra (X1) y la variable que sale de la base (S1)

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	0.025	0	1	-0.5	0	200
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Convierto el elemento pivote en uno: multiplico por su inverso multiplicativo (1/.025=40) el renglón S1

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
S1	(40)(0.025)	(40)(0)	(40)(1)	(40)(-0.5)	(40)(0)	(40)(200)
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Resultando

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
X1	1	0	40	-20	0	8000
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Transformo los valores de la tabla para los renglones X2, S3, Zj y Cj-Zj

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
X1	1	0	40	-20	0	8000
X2	0.5	1	0	10	0	18000
S3	0.075	0	0	-0.5	1	1100
Zj	10	20	0	200	0	360000
Cj-Zj	8.5	0	0	-200	0	

Operaciones

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
X1	1	0	40	-20	0	8000
X2	(1)(-0.5)+0.5	(0)(-0.5)+1	(40)(-0.5)+0	(-20)(-0.5)+10	(0)(-0.5)+0	(8000)(-0.5)+18000
S3	(1)(-0.075)+0.075	(0) (-0.075)+0	(40) (-0.075)+0	(-20) (-0.075)+(-0.5)	(0) (-0.075)+1	(8000) (-0.075)+1100
Zj	(1)(8.5)+10	(0)(8.5)+20	(40)(8.5)+0	(-20)(8.5)+200	(0)(8.5)+0	(8000)(8.5)+360000
Cj-Zj	(1)(-8.5)+ 8.5	(0)(-8.5)+ 0	(40)(-8.5)+ 0	(-20)(-8.5) + (-200)	(0)(-8.5)+ 0	

Tabla 3 (final)

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
X1	1	0	40	-20	0	8000
X2	0	1	-20	20	0	14000
S3	0	0	-3	1	1	500
Zj	18.5	20	340	30	0	428000
Cj-Zj	0	0	-340	-30	0	

La solución no puede mejorar, ya que no hay valores positivos en el renglón Cj-Zj de las variables no básicas, por lo que se ha alcanzado una solución factible óptima.

Variables básicas	**X1**	**X2**	**S1**	**S2**	**S3**	**Valor** solución
X1	**1**	**0**	**40**	**-20**	**0**	**8000**
X2	**0**	**1**	**-20**	**20**	**0**	**14000**
S3	**0**	**0**	**-3**	**1**	**1**	**500**
Zj	**18.5**	**20**	**340**	**30**	**0**	**428000**
Cj-Zj	**0**	**0**	**-340**	**-30**	**0**	

Resultados finales

Variables básicas	X1	X2	S1	S2	S3	Valor solución
X1	1	0	40	-20	0	8000
X2	0	1	-20	20	0	14000
S3	0	0	-3	1	1	500
Zj	18.5	20	340	30	0	428000
Cj-Zj	0	0	-340	-30	0	

Solución

X1 = 8000

X2 = 14000

S1 = 0

S2 = 0

S3 = 500 (hay una holgura del tercer recurso)

Z = $ 428,000

Las 3 tablas del problema

Simplex Tableau -- Iteration 1

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	18.5000	20.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0.0500	0.0500	1.0000	0	0	1,100.0000	22,000.0000
Slack_C2	0	0.0500	0.1000	0	1.0000	0	1,800.0000	18,000.0000
Slack_C3	0	0.1000	0.0500	0	0	1.0000	2,000.0000	40,000.0000
	C(j)-Z(j)	18.5000	20.0000	0	0	0	0	

Simplex Tableau -- Iteration 2

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	18.5000	20.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Slack_C1	0	0.0250	0	1.0000	-0.5000	0	200.0000	8,000.0000
X2	20.0000	0.5000	1.0000	0	10.0000	0	18,000.0000	36,000.0000
Slack_C3	0	0.0750	0	0	-0.5000	1.0000	1,100.0000	14,666.6700
	C(j)-Z(j)	8.5000	0	0	-200.0000	0	360,000.0000	

Simplex Tableau -- Iteration 3

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	18.5000	20.0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	18.5000	1.0000	0	40.0000	-20.0000	0	8,000.0000	
X2	20.0000	0	1.0000	-20.0000	20.0000	0	14,000.0000	
Slack_C3	0	0.0000	0.0000	-3.0000	1.0000	1.0000	500.0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	-340.0000	-30.0000	0	428,000.0000	

PROBLEMA 2. Fábrica de muebles

Maximización

Datos

- El propietario de una pequeña fabrica de muebles de madera se ha especializado en dos tipos de silla: Modelo A y Modelo B.
- La empresa, como es de esperarse, cuenta con recursos limitados de madera (120 pies cúbicos), de mano de obra (9hrs.) y de capacidad de terminado en el torno (24hrs.).
- Determinar la mejor mezcla de productos a fabricar por hora, a partir de los recursos disponibles, si se conoce la contribución a la ganancia de cada producto así como sus requerimientos, tal como se muestra en la tabla.

TABLA

	MODELO A	MODELO B
MADERA (pies cúbicos)	30	20
MANO DE OBRA (horas)	2	2
CAPACIDAD DE TERMINADO (horas)	4	6
CONTRIBUCIÓN ($)	10	8

El modelo matemático es:

$$\text{MAX} \quad Z = 10X1 + 8X2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 30X1 + 20X2 &\leq 120 \\ 2X1 + 2X2 &\leq 9 \\ 4X1 + 6X2 &\leq 24 \end{aligned}$$

$$X1, X2 \geq 0$$

Conversión a la forma estándar (inecuación a ecuación):

MAX $Z = 10X1 + 8X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5$

$30x1+20x2+1x3+0X4+0X5 = 120$

$2x1 +2X2 +0X3+ 1X4+0X5 = 9$

$4X1 + 6X2+0X3+X4+ 1X5 = 24$

$X1, X2, S1, S2, S3 = 0$

Elaborar la tabla simplex que permita obtener la primera solución básica factible (TABLA 1)

VARIABLE DE SOLUCIÓN	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X3	30	20	1	0	0	120
X4	2	2	0	1	0	9
X5	4	6	0	0	1	24
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Cj – Zj: Representa la utilidad neta al introducir una unidad de x

X3, X4, X5 variables básicas.
X1, X2 variables no básicas.

Lado derecho: valores de la solución actual.

Cuerpo de la tabla: coeficientes de cada variable.

Parte inferior: contribución a la utilidad neta.

Ver si la solución puede mejorarse. Existe una mejor solución dado que el renglón Cj – Zj posee valores positivos: 10 para X1 y 8 para X2

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X3	30	20	1	0	0	120
X4	2	2	0	1	0	9
X5	4	6	0	0	1	24
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Determinar la variable que ingresa y la que la sale.

Regla de entrada (criterio de optimalidad): Entra aquella variable no básica con la mayor ganancia unitaria (en el caso de MAX). Columna pivote entra X1 por que 10 es mayor que 8 (10 > 8).

Regla de salida (criterio de factibilidad): Sale aquella variable cuyo resultado de dividir la cantidad solución entre el coeficiente de la columna pivote sea menor. Renglón Pivote 120/30 = 40 9/2= 4.5 24/4 = 6 por lo tanto sale X3 porque 4 es menor que 4.5 y que 6.

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X3	30	20	1	0	0	120
X4	2	2	0	1	0	9
X5	4	6	0	0	1	24
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Se identifica el elemento pivote

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X3	30	20	1	0	0	120
X4	2	2	0	1	0	9
X5	4	6	0	0	1	24
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Se cambia X3 por la variable que entra a la base (X1).

Se transforma en uno multiplicando por su inverso multiplicativo (1/30), todo el renglón pivote (X1)

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	30/30	20/30	1/30	0/30	0/30	120/30
X4	2	2	0	1	0	9
X5	4	6	0	0	1	24
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Resultado

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	2/3	1/30	0	0	4
X4	2	2	0	1	0	9
X5	4	6	0	0	1	24
Zj	0	0	0	0	0	0
Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Uso el renglón pivote para convertir X4, X5, Zj, Cj-Zj

	VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
	X1	1	2/3	1/30	0	0	4
(-2)	X4	2	2	0	1	0	9
(-4)	X5	4	6	0	0	1	24
(10)	Zj	0	0	0	0	0	0
(-10)	Cj – Zj	10	8	0	0	0	

Multiplico el renglón pivote por estos valores y lo sumo a cada renglón, con ello convierto en ceros las celdas abajo del elemento pivote: X4, X5

Operaciones

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	2/3	1/30	0	0	4
X4	-2(1)+2	-2(2/3)+2	-2(1/30)+0	-2(0)+1	-2(0)+0	-2(4)+9
X5	-4(1)+4	-4(2/3)+6	-4(1/30)+0	-4(0)+0	-4(0)+1	-4(4)+24
Zj	10(1)+0	10(2/3)+0	10(1/30)+0	10(0)+0	10(0)+0	10(4)+0
Cj – Zj	-10(1)+ 10	-10(2/3)+ 8	-10(1/30)+ 0	-10(0)+ 0	-10(0)+ 0	

Tabla 2

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	2/3	1/30	0	0	4
X4	0	2/3	-2/30	1	0	1
X5	0	10/3	-4/30	0	1	8
Zj	10	20/3	10/30	0	0	40
Cj – Zj	0	4/3	-10/30	0	0	

La solución puede mejorarse ya que hay una cantidad positiva en $C_j - Z_j$

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	2/3	1/30	0	0	4
X4	0	2/3	-2/30	1	0	1
X5	0	10/3	-4/30	0	1	8
Zj	10	20/3	10/30	0	0	40
Cj – Zj	0	4/3	-10/30	0	0	

INTERPRETACIÓN DE LA TABLA 2

La solución en esta tabla 2 es: X1=4, X2=0, X3=0, X4=1, X5=6 y Z=40. La cual no es la solución óptima, dado que en el renglón Cj-Zj existe un valor (4/3) mayor que 0 para una variable (X2), por lo cual dicha variable debe entrar en la solución

Determinar la variable que ingresa y la que la sale.

Regla de entrada (criterio de optimalidad): Entra aquella variable no básica con la mayor ganancia unitaria (en el caso de MAX). Columna pivote entra X2 por que 4/3 es mayor que 0.

Regla de salida (criterio de factibilidad): Sale aquella variable cuyo resultado de dividir la cantidad solución entre el coeficiente de la columna pivote sea menor. (4/(2/3)) = 6, 1 /(2/3) = 1.5, 8 /(10/3) = 12. Sale X4.

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	2/3	1/30	0	0	4
X4	0	2/3	-2/30	1	0	1
X5	0	10/3	-4/30	0	1	8
Zj	10	20/3	10/30	0	0	40
Cj – Zj	0	4/3	-10/30	0	0	

Se identifica el elemento pivote, para convertirlo en 1 se multiplica el renglón X4 por 3/2

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	2/3	1/30	0	0	4
X4	0	1	-1/10	3/2	0	3/2
X5	0	10/3	-4/30	0	1	8
Zj	10	20/3	10/30	0	0	40
Cj – Zj	0	4/3	-10/30	0	0	

Usando el renglón pivote se realizan operaciones equivalentes:

(1)(-2/3) = -2/3 + 2/3 = 0
(-1)(-2/3) 0 + 2/30 + 1/30 = 3/30 = 1/10
(3/2)(-2/3) 0 – 6/6 = -1
(3/2)(-2/3) = -1+ 4 =3

(1)(-10/30) = -10/3 + 10/3 = 0
(-1/10)(-10/3) = 10/30 -4/30 = 6/30
(3/2)(-10/3) = -30/6 = -5
(3/2)(-10/3) = -30/6 +8 = 3

(1)(4/3) = 4/3 + 20/3 = 8
(-1/10)(4/3) = -4/30 + 10/30 = 6/30
(3/2)(4/3) = 12/6 = 2
(3/2)(4/3) = 2 + 40

(1)(-4/3)= -4/3 + 4/3 = 0
(-1/16)(-4/3) = 4/30 – 10/30 = -6/30 = -2/10
(3/2)(-4/3) = -2

Por lo tanto la solución en la tabla 3 es:

TABLA 3

VARIABLES BASICAS	X1	X2	X3	X4	X5	CANTIDAD SOLUCIÓN
X1	1	0	1/10	-1	0	3
X2	0	1	-1/10	3/2	0	3/2
X5	0	0	6/30	-5	1	3
Zj	10	8	2/10	2	0	42
Cj – Zj	0	0	-2/10	-2	0	

INTERPRETACIÓN DE LA TABLA 3

- La cual es una *solución óptima*, dado que en el renglón Cj-Zj todos los coeficientes son negativos o cero y así tenemos:

X1= 3

X2 = 3/2

X3= 0

X4 = 0

X5 = 3

Z = 42 = 10(3) + 8 (1.5) = 30 + 12 = 42

PROBLEMA 3. Artículos para el hogar

Maximización

- Una fabrica de artículos para el hogar manufactura dos productos: A y B. Ambos pasan por el mismo proceso: Maquinado, Armado y Montaje.
- Las disponibilidades (min/diarios) de cada operación en el proceso son: 480, 600 y 540 respectivamente. El producto A deja una utilidad de \$100 por unidad y el producto B \$120 por unidad.
- Los requerimientos de transformación en minutos son los siguientes:

PROCESO	PRODUCTO A	PRODUCTO B
MAQUINADO	4	8
ARMADO	5	6
MONTAJE	12	8

El objetivo es maximizar las utilidades, por lo tanto la ecuación de la función objetivo es:

MAX $Z = 100X1 + 120X2$

Sujeto a:

$$4X1 + 8X2 \leq 480$$
$$5X1 + 6X2 \leq 600$$
$$12X1 + 8X2 \leq 540$$

X1, X2 >=0

En su forma estándar:

$$Z = 100X1 + 120X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5$$

$$\begin{array}{rcccccl}
4X1 + & 8X2 + & X3 & & & = 480 \\
5X1 + & 6X2 + & & + X4 & & = 600 \\
12X1 + & 8X2 + & & & + X5 & = 540
\end{array}$$

$$Xi = 0$$

TABLA 1

ENTRA

Primera tabla del simplex:

VAR. DE SOL.	X1	X2	X3	X4	X5	CANT.SOL.	
X3	4	8	1	0	0	480	(SALE)
X4	5	6	0	1	0	600	
X5	12	8	0	0	1	540	
Zj	0	0	0	0	0	0	
Cj – Zj	100	120	0	0	0		

CÁLCULOS

(-6)(1) = -6 + 6 = 0
(-6)(4/8) = -24/8 = -3+5 = 2
(-6)(1/8) = -6/8 + 0 = -6/8
(-6)(60) = -360 + 600 = 240

(-8)(4/8) = -32/8 + 12 = 8
(-8)(1) = -8+8 = 0
(-8)(1/8) = -8/8 + 0= -1
(-8)(0) = 0
(-8)(0) = 0
(-8)(60) = -480 + 540 = 60

(20)(4/8) = 480/8 = 60
(120)(1/8) = 120/8 = 15
(120)(60) = 7200
(-120)(1/8) = -480/8 = -60
(-120)(1/8) = -120 / 8 = -15

TABLA 2

ENTRA

VAR. DE SOL.	X1	X2	X3	X4	X5	CANT.SOL.	
X2	4/8	1	1/8	0	0	60	
X4	2	0	-6/8	1	0	240	
X5	8	0	-1	0	1	60	(SALE)
Z_j	60	120	15	0	0	7200	
$C_j - Z_j$	40	0	-15	0	0		

CÁLCULOS

(-2)(1) = -2 + 2 = 0

(-2)(-1/8) = 2/8 – 6/8 = -4/8 = -1/2

(-2)(0) = 0+ 1 = 1

(-2)(1/8) = -2/8 + 0 = -1/4

(-2)(7.5) = -15 + 240 = 225

(-4/8)(1) = -4/8 + 4/8 = 0

(-4/8)(-1/8) = 4/64 + 1/8 = 1/16 + 2/16 = 3/16

(-4/8)(1/8) = -4/64 = -1/16

(-4/8)(7.5) = 3.75

(-1/2)(7.5) = -3.75 + 60 = 56.25

(40)(1) = 40 + 60 = 100

(40)(-1/8) = -40/8 + 15 = 10

(40)(1/8) = 40/8 = 5

(40)(7.5) = 300 + 7200 = 7500

TABLA 3, esta es la tabla optima.

VAR. DE SOL.	X1	X2	X3	X4	X5	CANT. SOL.
X2	0	1	3/16	0	-1/16	56.25
X4	0	0	-1/2	1	-1/4	225
X1	1	0	-1/8	0	1/8	7.5
Zj	100	120	10	0	5	7500
Cj – Zj	0	0	-10	0	-5	

SOLUCIÓN

$X1 = 7.5$

$X2 = 56.25$

$X3 = 0$

$X4 = 225$

$X5 = 0$

$Z = 100(75) + 120(56.25) = 750 + 6750 =$ **7500**