EL MÉTODO SIMPLEX ALGEBRAICO

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Modelos sin solución óptima

- Degeneración.
- Soluciones múltiples o alternativas ()
- No acotado: Ocurre cuando el objetivo puede crecer infinitamente (objetivo a maximizar).
- No factible: Ocurre cuando en el modelo no hay ningún punto de factible.

PROBLEMAS DEGENERADOS

- Puede ocurrir en el proceso de pivoteo cuando se tiene un empate al determinar la variable que debe salir de la base.
- Se cae en un círculo vicioso cuando se busca la solución óptima.
- En términos geométricos ocurre cuando un vértice está definido por demasiadas restricciones.

Degeneración:

- La degeneración ocurre cuando en alguna iteración del método símplex existe un empate en la selección de la variable que sale, este empate se rompe arbitrariamente.
- Sin embargo, cuando suceda esto una o más de las variables básicas, será necesariamente igual a cero en la siguiente iteración.
- En este caso decimos que la nueva solución es *degenerada.*

Múltiples alternativas óptimas:

- Cuando la función objetivo es paralela a una restricción que se satisface en el sentido de la igualdad a través de la solución óptima, la función objetivo tomará el mismo valor óptimo en más de un punto de la solución. Por esta razón reciben el nombre de Múltiples alternativas óptimas.

¿ Cómo sabemos en las tablas que existen múltiples alternativas óptimas ?

- Cuando en los coeficientes de las variables no básicas en el renglón z de la tabla óptima existe una variable con valor de cero, lo que indica que esa variable no básica puede entrar a la solución básica sin alterar el valor de z , pero provoca un cambio en el valor de las variables.

SOLUCIONES MÚLTIPLES O ALTERNATIVAS

¿Cuál es la región factible para el siguiente modelo? :

A) Min $Z = 3X1 + 5X2$

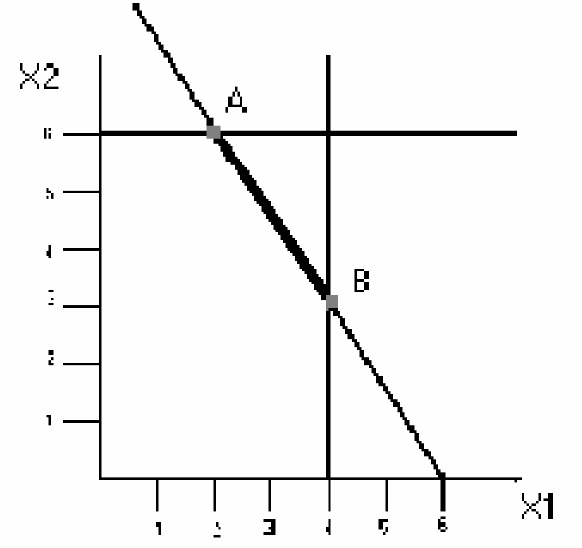
Sujeto a:

$X1 \leq 4$ $\quad$ $X1 = 4$

$2X2 \leq 12$ $\quad$ $X2 = 6$

$3X1 + 2X2 = 18$ $\quad$ $X1 = 0$ $\quad$ $X2 = 9$

$X1, 2 \geq 0$ $\quad$ $X2 = 0$ $\quad$ $X1 = 6$



La región factible es el segmento A B si la recta de la función objetivo es paralela entonces se tiene una solución múltiple o alternativa.

SOLUCIÓN NO ACOTADA

- Un error de planteamiento de un problema de Programación Lineal da como resultado que el problema no tenga una solución óptima.
- Para problemas de esta naturaleza, en apariencia la función objetivo puede aumentarse sin cota, situación que no es realista en la práctica.

Soluciones no acotadas:

En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables se pueden aumentar en forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones, lo que significa que el espacio de soluciones es no acotado cuando menos en una dirección.

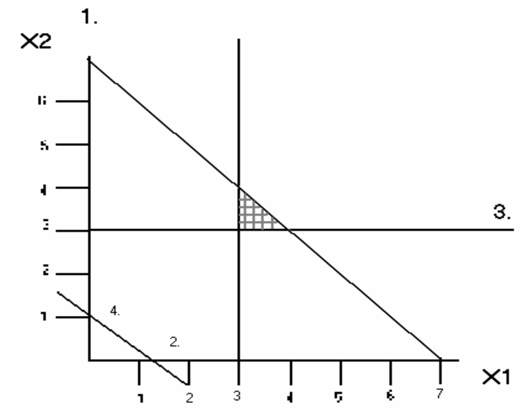
Como resultado el valor de la función objetivo puede crecer (caso de la minimización) en forma indefinida.

¿ Cómo sabemos en las tablas que existe solución no acotada ?

Cuando en la tabla del simplex en el renglón de la z existe una variable no básica que puede entrar pero al determinar la variable que sale nos damos cuenta que en su columna existen solo valores de cero o negativos, lo que significa que esa variable puede hacer crecer en forma indefinida a z sin que se infrinja ninguna de las restricciones. Por lo tanto concluimos sin hacer más cálculos que el problema no tiene solución acotada.

SOLUCIÓN NO ACOTADA

B) MAX Z = 5X1 + 3X2



Sujeto a:

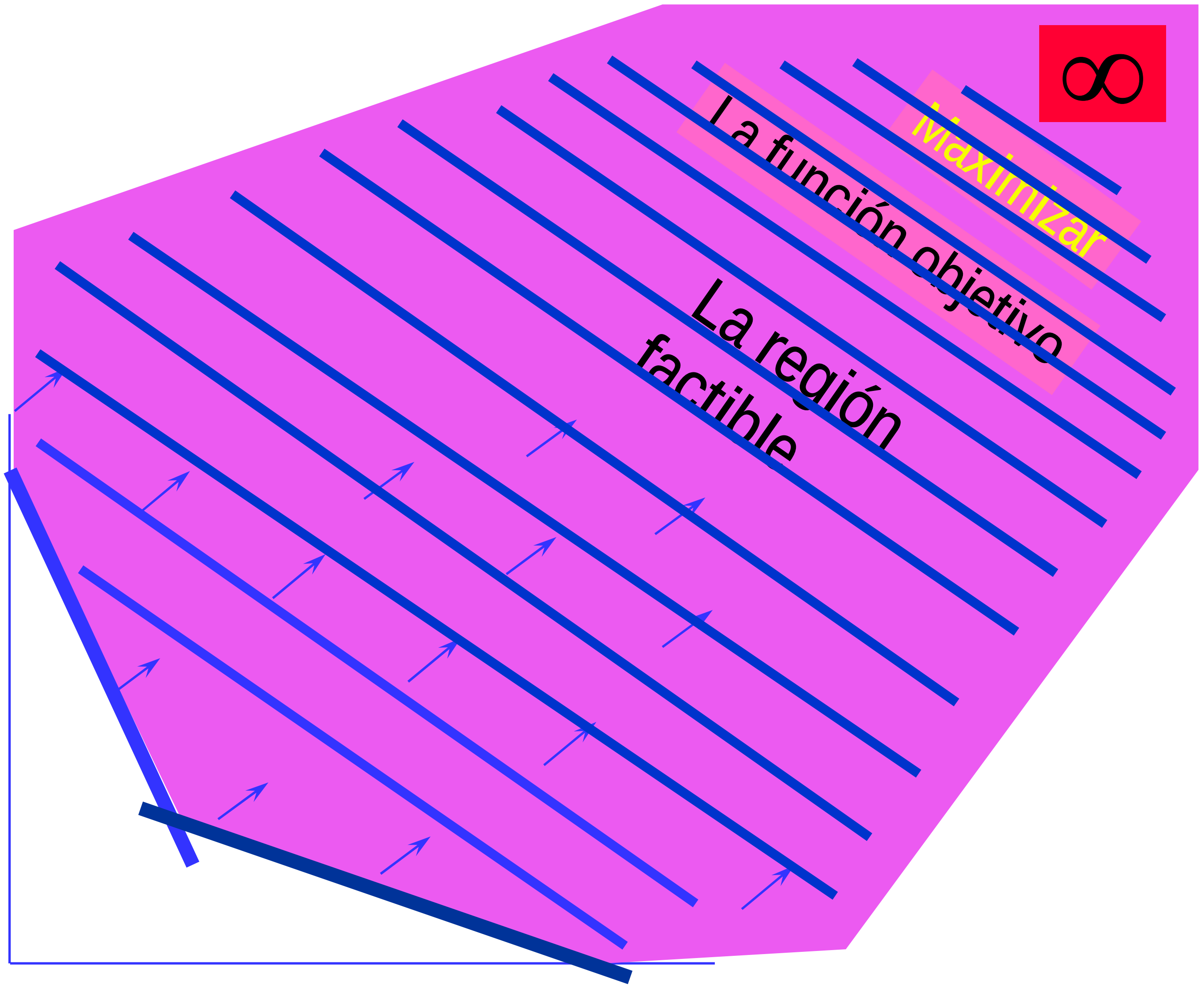
1. X1 + X2 <= 7   X2= 0   X1=7   X1=0   X2=7
2. X1 >= 3   X1=3
3. X2 >= 3   X2=3
4. 2X1 +3X2 >= 3   X1=0   X2=1   X1=3/2   X2=0

X1, 2 >=0

La solución es la siguiente región sombreada:

Si eliminamos la primera restricción, la solución sería <u>no acotada</u>

Solución No Acotada



INFACTIBILIDAD O INCONSISTENCIA

- Otra situación que se presenta por errores en el planteamiento de problemas de PL es el de restricciones inconsistentes.
- En esta situación no existe una sola región factible por que las restricciones se violan entre sí.

Solución Infactible:

Si las restricciones no se pueden satisfacer en forma simultánea, se dice que el modelo no tiene solución factible.

Esta situación nunca puede ocurrir si todas las restricciones son del tipo Menor igual (suponiendo valores positivos en el segundo miembro) ya que las variables de holgura producen siempre una solución factible.

Sin embargo, cuando empleamos los otros tipos de restricciones, recurrimos al uso de variables artificiales, que por su mismo diseño no ofrecen una solución factible al modelo original.

Aunque se hacen previsiones (a través del uso de penalizaciones) para hacer que estas variables artificiales sean cero en el nivel óptimo, esto sólo puede ocurrir si el modelo tiene una espacio factible.

Si no lo tiene, cuando menos una variable artificial será positiva en la tabla óptima.

INFACTIBILIDAD

C) MAX Z = 5X1 + 3X2

Sujeto a:

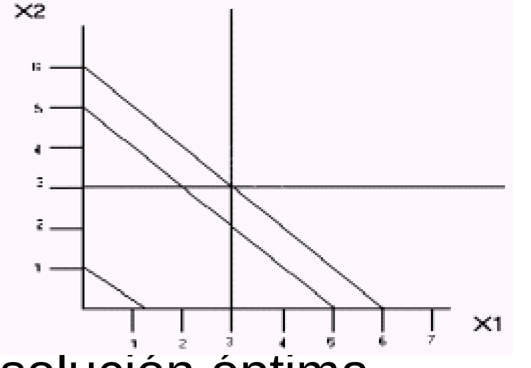
X1 + X2 <= 5 X1=5 X2=0 X1=0 X2=5

X1 >= 3 X1=3

X2 >= 3 X2=3

2X1 + 3X2 >= 3 X1=0 X2=1 X1=3/2 X2=0

X1, 2 >=0

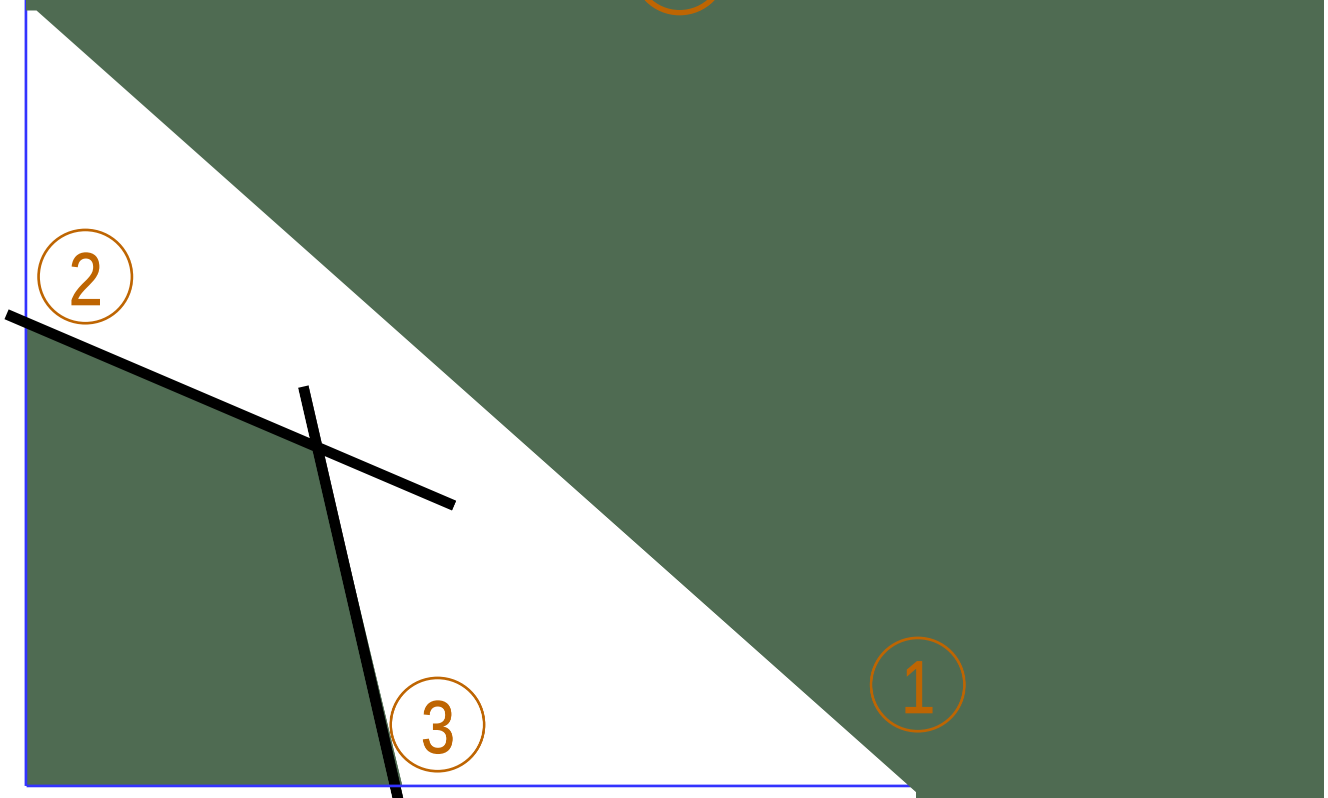


No existe región factible por lo tanto, no existe una solución óptima.

(NO FACTIBILIDAD).

Infactibilidad

Ningún punto se encuentra, simultáneamente, sobre la línea 1 la línea 2 y 3



Tipos de soluciones en problemas de PL: método algebraico

- Solución óptima finita única.
- Solución óptima finita múltiple.
- Solución ilimitada.
- Solución infactible.

Ejemplo 6.2 Ilustración de una solución finita única

Considere el siguiente problema

$$\text{maximizar:} \qquad x_0 = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeta a:} \qquad 4x_1 + 3x_2 &\leq 20 & ① \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 & ② \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 8 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 & ④ \end{aligned}$$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejemplo 6.3 Ilustración de una solución óptima finita múltiple

Suponga el siguiente problema

$$\text{maximizar:} \qquad x_0 = 4x_1 + 6x_2$$

$$\text{sujeta a:} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 && (1) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 12 && (2) \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 2 && (3) \\ x_1, x_2 &\geq 0 && (4) \end{aligned}$$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejemplo 6.4 Ilustración de una solución ilimitada

Sea un problema

$$\text{maximizar:} \qquad x_0 = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeta a:} \qquad x_1 + x_2 &\geq 2 & ① \\ x_1 - 3x_2 &\leq 2 & ② \\ x_1 - x_2 &\leq 3 & ③ \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 & ④ \\ x_1, x_2 &\geq 0 & ⑤ \end{aligned}$$

Resuélvalo por el método algebraico

Solución infactible

- Considere el siguiente problema:

Max $Z=2x1+3x2$

Sujeta a:

$-x1-x2>=1$…(1)

$-8x1-4x2<=16$…(2)

$-3x1+4x2<=12$…(3)

$X1,x2 >=0$…(4)

Resuélvalo por el método algebraico

Ejercicio

¿Cuál es la región factible para el siguiente modelo? :

Min $Z = 3X1 + 5X2$

Sujeto a:

$X1 \leq 4$

$2X2 \leq 12$

$3X1 + 2X2 = 18$

$X1, X2 \geq 0$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejercicio

¿Cuál es la región factible para el siguiente modelo?

MAX $Z = 5X1 + 3X2$

Sujeto a:

$X1 + X2 <= 7$

$X1 \quad >= 3$

$X2 >= 3$

$2X1 + 3X2 >= 3$

$X1, X2 >= 0$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejercicio

¿Cuál es la región factible para el siguiente modelo?

MAX $Z = 5X1 + 3X2$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
X1 + X2 \le 5 \\
X1 \quad\quad\quad \ge 3 \\
\quad\quad\quad X2 \ge 3 \\
2X1 + 3X2 \ge 3 \\
X1, X2 \ge 0
\end{array}
$$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejemplo. Breeding Manufacturing Inc.

Mezcla de productos

Para el problema su modelo de programación lineal es:

MAXIMIZAR: $Z = 50x1 + 75x2$

SUJETO A:

$3.6X1 + 4.8\ X2 <= 4800$

$1.6X1 + 1.8\ X2 <= 1980$

$0.6X1 + 0.6x2 <= 900$

$X1 >= 300$

$X2 >= 180$

$x1, x2 >= 0$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejemplo. Protac

Programación de máquinas

Para el problema su modelo de programación lineal es:

Max Z=5000x1+4000x2

$$10x_1 + 15x_2 \leq 150$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 160$$

$$30x_1 + 10x_2 \geq 135$$

$$3x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resuélvalo por el método algebraico

Ejemplo. La empresa High Tech Co.

Asignación de recursos limitados

Para el problema su modelo de programación lineal es:

Maximizar $Z = 50X_1 + 40X_2$

Max $Z = 50X_1 + 40X_2$

Sujeta a: $3X_1 + 5X_2 \leq 150$ tiempo de ensamble.

$X_2 \leq 20$ monitores para HTPC

$8X_1 + 5X_2 \leq 300$ espacio para almacenar.

$X_1, X_2 \geq 0$

Resuélvalo por el método algebraico