

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO



Modelos de Pert/CPM: intercambios de tiempo y costo

M. En C. Eduardo Bustos
Farías

- * Hasta este punto nos hemos concentrado la atención en los aspectos del *tiempo* de PERT/CPM y en que debe tenerse cuidado de satisfacer una fecha programada de terminación.
- * No se ha analizado el costo de los recursos asociados con cumplir con una fecha específica de terminación, o de los costos que estarían relacionados con reducir el tiempo de terminación.

- * Hemos visto como PERT/CPM se concentra en el factor tiempo del desarrollo de un proyecto y ofrece información que puede utilizarse para programar y controlar actividades y del proyecto en total.
- * No obstante, aunque el tiempo es una consideración importante, existen muchas situaciones en las que el costo es casi tan importante como el tiempo.
- * A continuación veremos como PERT/costo puede ser utilizado, adicionalmente, para controlar los costos de un proyecto, puesto que su objetivo es ofrecer información que sirva para mantener los costos del proyecto dentro de un presupuesto especificado y para un mejor ejercicio de recursos adicionales.



EJEMPLO 1

PERT COSTO



- * Muchas actividades de una red pueden reducirse, pero sólo aumentando los costos.
- * Por ejemplo, en la red de la Sharp Company, es probable que pudieran reducirse los tiempos de la actividad C, “ordenar y recibir los materiales para el producto”, y de la actividad D, “ordenar y recibir los materiales para el empaque” invirtiendo dólares adicionales para acelerar los pedidos y/o estando dispuestos a pagar cantidades extra por entregas más prontas de los materiales.
- * De la misma manera, los tiempos de la actividad de fabricación E y F, y de los tiempos de las actividades de prueba, G y H, pueden reducirse utilizando equipo y/o mano de obra adicionales, todo lo cual añade costos extra para la terminación del proyecto.

- * Sin embargo, las actividades no pueden reducirse más allá de cierto punto, sin importar la cantidad de dinero adicional que se invierta.
- * Por ello, existe un límite mínimo sobre el tiempo total que se requiere para terminar un proyecto; más allá de este punto el costo simplemente se incrementa sin una reducción adicional en el tiempo de terminación del proyecto.



- * La figura es una representación gráfica de la relación entre el tiempo y el costo en un proyecto representativo.
- * Cada punto de esta *curva de intercambio de tiempo y costo* representa un programa factible para el proyecto.
- * Observe que existe un *programa de tiempo mínimo* así como también un *programa de costo mínimo*.
- * Sólo este programa y los que están sobre la curva y entre los dos puntos extremos son programas factibles.

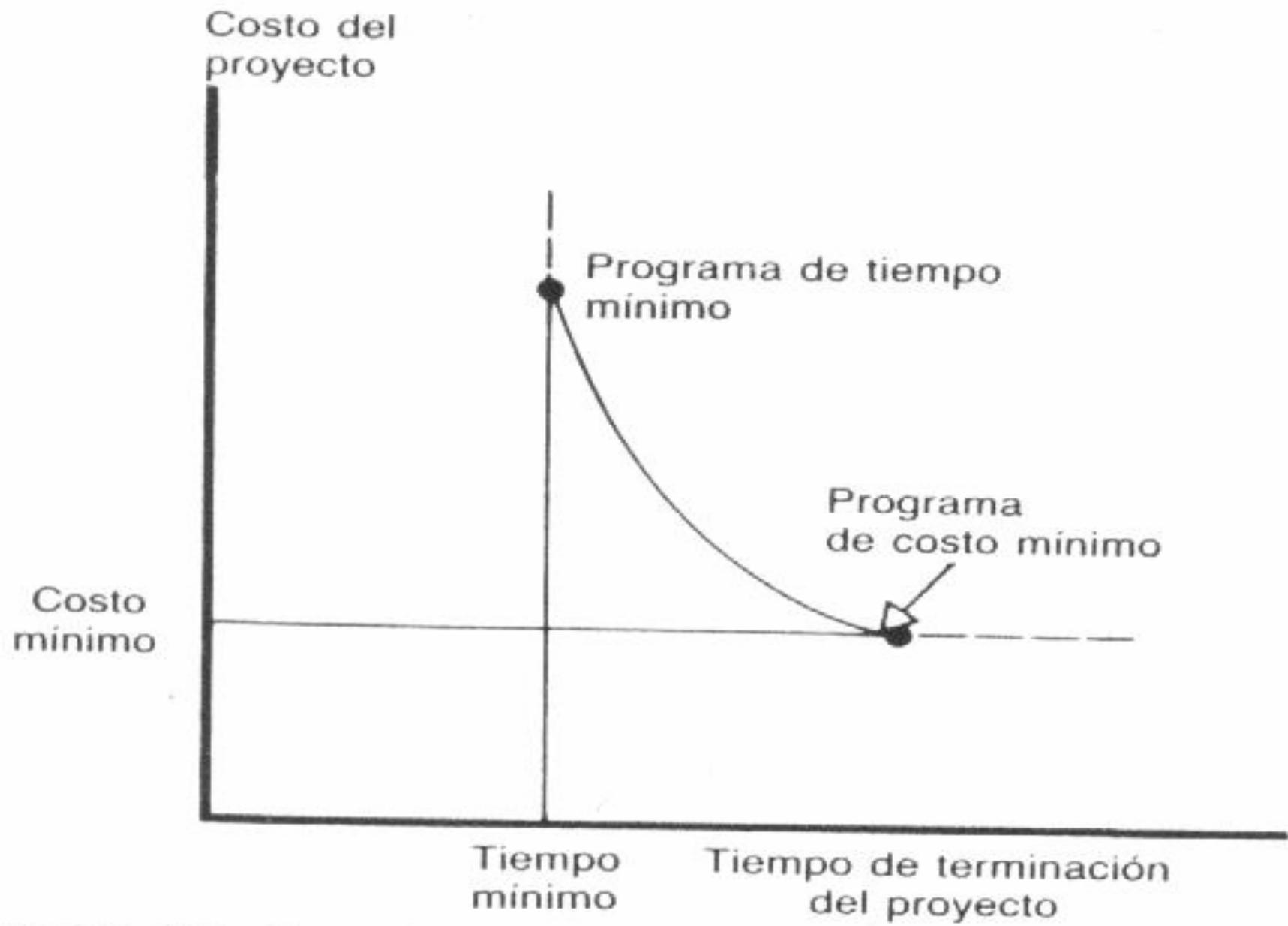


FIGURA 6-11. Curva de intercambio de tiempo y costo

- * Podría desarrollarse un programa de tiempo y costo para el caso de la Sharp Company; sin embargo, puesto que es muy alta la probabilidad (recuerde que era de 0.9772) de que se satisfaga la fecha fijada de 26 semanas, es poco probable que los administradores estuvieran dispuestos a invertir dinero extra para reducir el tiempo de terminación del proyecto.
- * Por ello, consideremos otro ejemplo que puede usarse para ilustrar la construcción de una curva de tiempo y costo, así como también otros conceptos de intercambio entre tiempo y costos.
- * Suponga que se tiene un proyecto formado por ocho actividades.

Los cálculos de la ruta crítica (anotados en la red) muestran que las actividades A, B, C y D son críticas y que el tiempo esperado de terminación es 17 días (suponiendo que los tiempos de las actividades se expresen en días).

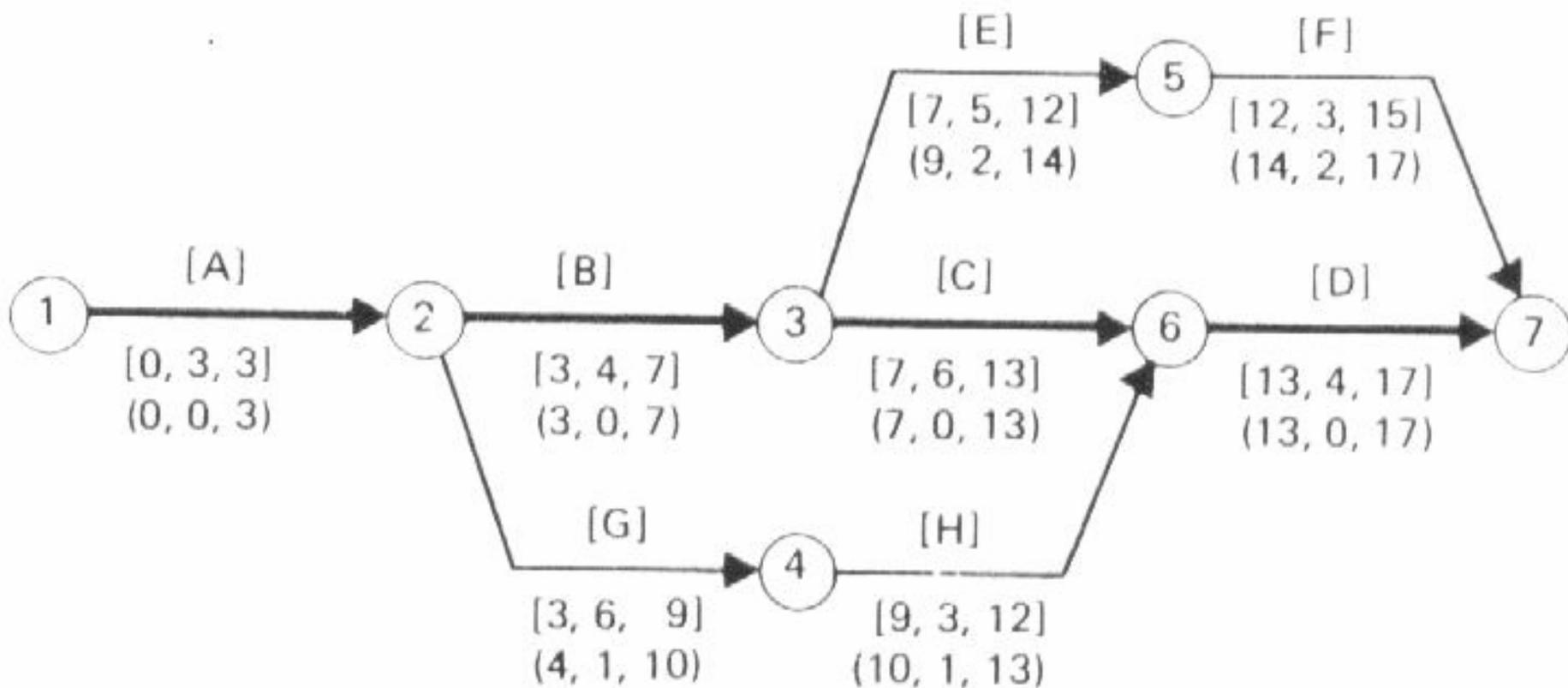


FIGURA 6-12. Diagrama de red para el proyecto de ejemplo

Reducción de los tiempos de las actividades (tiempos "de urgencia")



Para determinar qué actividad debe reducirse y en cuánto, es necesario saber:

- (1) el costo esperado asociado con cada tiempo esperado de actividad;
- (2) el tiempo más breve posible para cada actividad, si se aplica el máximo de recursos, y
- (3) el costo esperado para la actividad y asociado con el tiempo más corto posible para esa actividad.

Se utiliza la siguiente notación para representar estos factores:

- * t_n = tiempo normal (esperado) para la actividad
- * c_n = costo asociado con el tiempo normal de la actividad
- * t_c = tiempo reducido: al menor tiempo posible para terminar la actividad (reducción máxima)
- * c_c = costo de reducción: el costo asociado con el menor tiempo posible para la actividad (reducción máxima)

Las relaciones entre t_n , c_n , t_c y c_c se muestran en la figura:

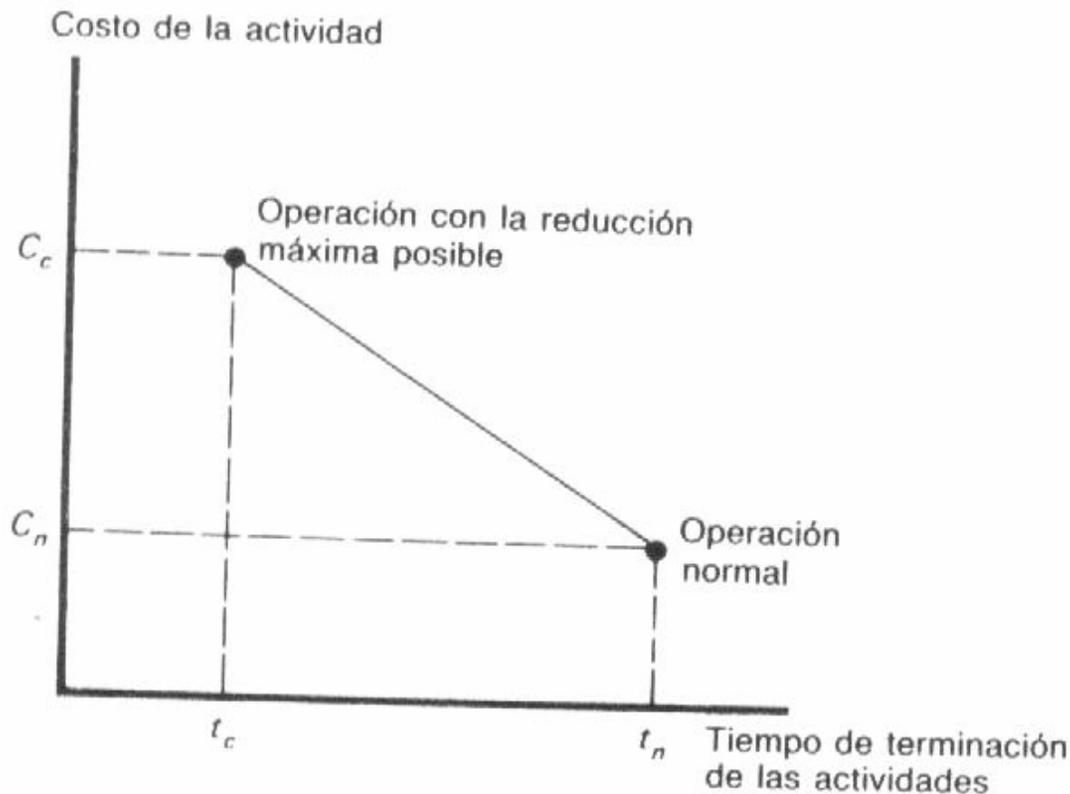


FIGURA 6-13. Relación entre los tiempos y los costos normales y reducidos para las actividades

Datos normales y de reducción para el ejemplo del proyecto con ocho actividades

<i>Actividad</i>	<i>Tiempo Normal (t_n)</i>	<i>Costo Normal (c_n)</i>	<i>Tiempo de Urgencia (t_c)</i>	<i>Costo de Urgencia (c_c)</i>
A	3	\$ 300	2	\$ 360
B	4	\$ 500	2	\$ 900
C	6	\$1000	3	\$1600
D	4	\$ 600	3	\$ 650
E	5	\$1200	2	\$1500
F	3	\$ 500	3	\$ 500
G	6	\$ 800	5	\$1050
H	3	\$ 900	2	\$1200

Para utilizar estos datos con el objeto de determinar qué actividades deben reducirse y en qué medida, deben calcularse dos factores:

(1) la reducción máxima de tiempo para cada actividad, que se expresa de la siguiente manera:

$$t_D = t_n - t_c$$



(2) el costo de reducción por unidad de tiempo que se expresa como sigue:

$$S = \frac{\text{Costo}_{\text{emergencia}} - \text{Costo}_{\text{normal}}}{\text{Tiempo}_{\text{normal}} - \text{Tiempo}_{\text{emergencia}}} = \frac{C_c - C_n}{t_n - t_c} = \frac{C_c - C_n}{t_D}$$

Para ilustrar esto, la actividad C tiene un tiempo normal de 6 días con un costo asociado de \$1000 y un tiempo máximo de reducción de 3 días con un costo asociado de \$6000.

Por tanto, el tiempo máximo de reducción para la actividad es $tD = t_n - t_c = 6 - 3 = 3$ días. El costo diario asociado para alcanzar esta reducción es

$$S = \frac{C_c - C_{nl}}{t_n - t_c} = \frac{1600 - 1000}{6 - 3} = \frac{600}{3} = \$200 \text{ por día}$$

Máxima reducción y costos de emergencia por unidad de tiempo para el proyecto



<i>Actividad</i>	<i>Tiempo Normal (t_n)</i>	<i>Costo Normal (c_n)</i>	<i>Tiempo de Urgencia (t_c)</i>	<i>Costo de Urgencia (c_c)</i>	<i>Reducción Máxima de Urgencia</i> $t_D = t_n - t_c$	<i>Costo de urgencia Por unidad de tiempo</i> $S = \frac{C_c - C_n}{t_n - t_c}$
A	3	\$ 300	2	\$ 360	1	\$ 60
B	4	\$ 500	2	\$ 900	2	\$ 200
C	6	\$1000	3	\$1600	3	\$ 200
D	4	\$ 600	3	\$ 650	1	\$ 50
E	5	\$1200	2	\$1500	3	\$ 100
F	3	\$ 500	3	\$ 500	0	\$ 0
G	6	\$ 800	5	\$1050	1	\$ 250
H	3	\$ 900	2	\$1200	1	\$ 300
		\$5800		\$7760		



- * Una vez que se han obtenido los datos de la tabla anterior, es posible comenzar con el proceso de reducción.
- * El procedimiento que se utiliza consiste en examinar las actividades de la ruta crítica y elegir la actividad que tenga el menor costo de reducción por unidad y tiempo.
- * Se reduce esa actividad en una unidad de tiempo a la vez y después se reevalúa la red para identificar la ruta crítica.
- * Si aparecen rutas críticas paralelas, deben reducirse todas ellas en forma simultánea en etapas de reducción subsecuentes.
- * Puede continuarse este proceso hasta que todas las actividades de cualquier ruta crítica se hayan reducido en su totalidad.



RUTA CRÍTICA

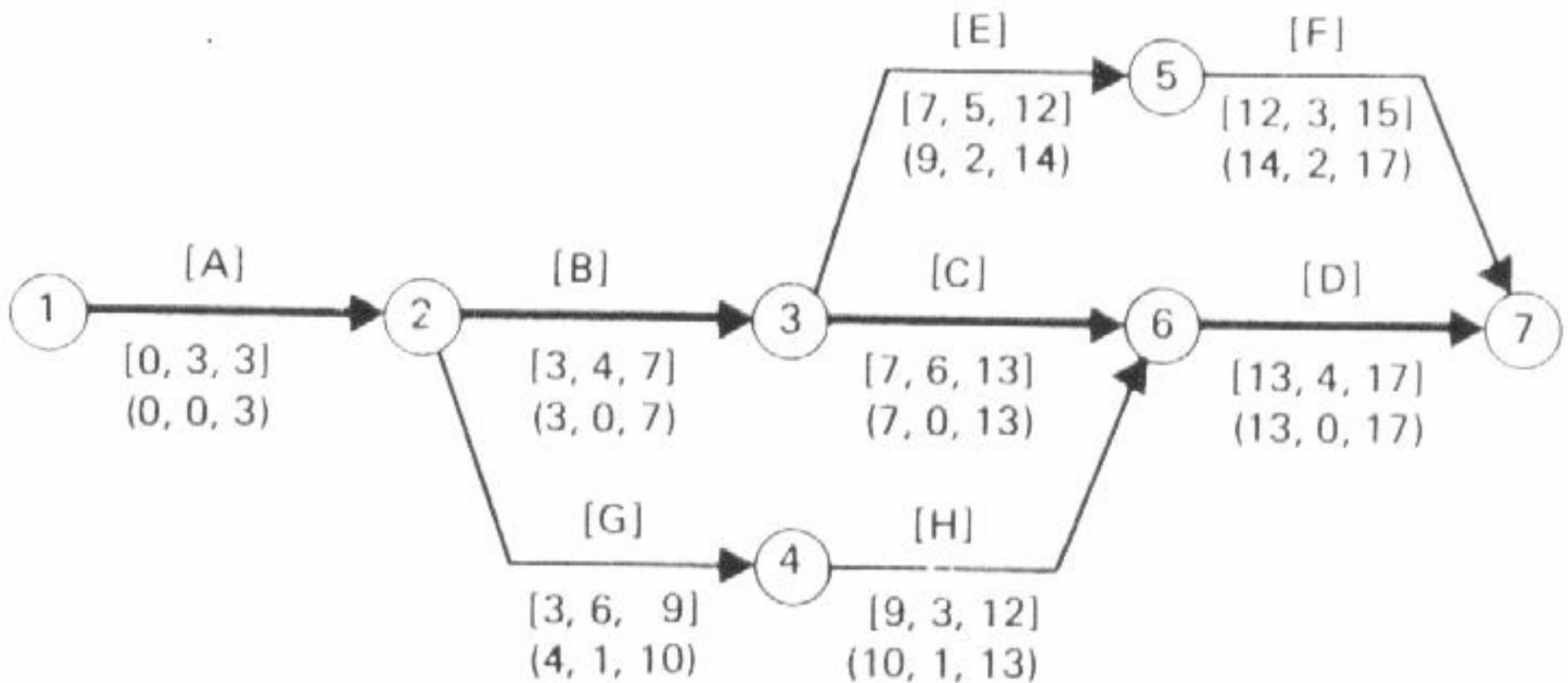


FIGURA 6-12. Diagrama de red para el proyecto de ejemplo

- * Comenzando con la figura anterior se observa que las actividades A, B, C y D se encuentran todas sobre la ruta crítica.
- * Dado que la actividad D tiene el menor costo de reducción por unidad de tiempo, \$50, se reduce esta actividad en un día.
- * La red que resulta se muestra en la figura siguiente:



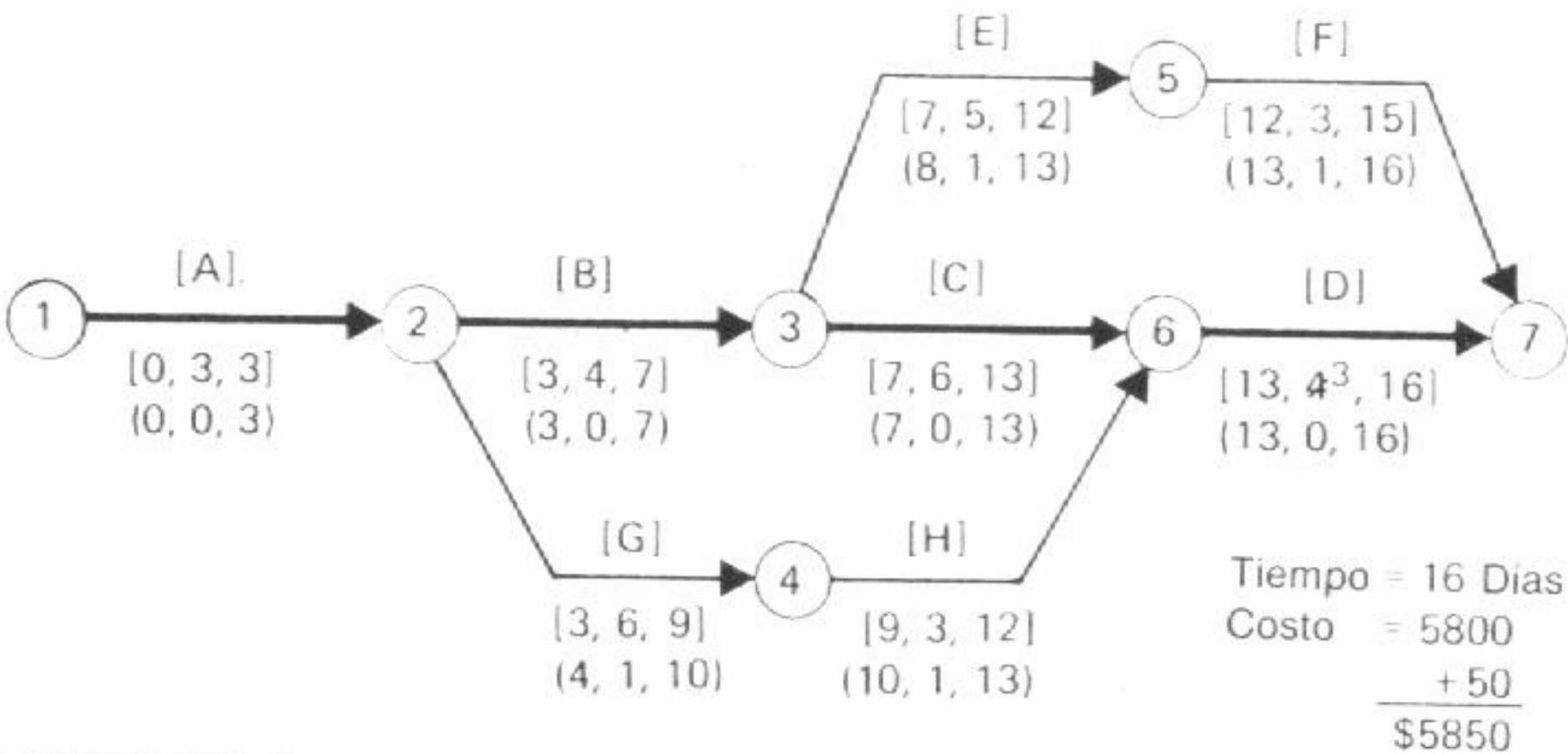


FIGURA 6-14. Red después de reducir D en un día

- ✦ Las actividades A, B, C y D siguen siendo las actividades críticas en la figura anterior, y la actividad D se ha reducido a su máximo posible (1 día).
- ✦ Puesto que la actividad A tiene el menor costo de reducción por unidad de tiempo y se encuentra sobre la ruta crítica, ahora se procede a reducir esta actividad.
- ✦ La figura siguiente es la nueva red después de reducir la actividad A en un día.

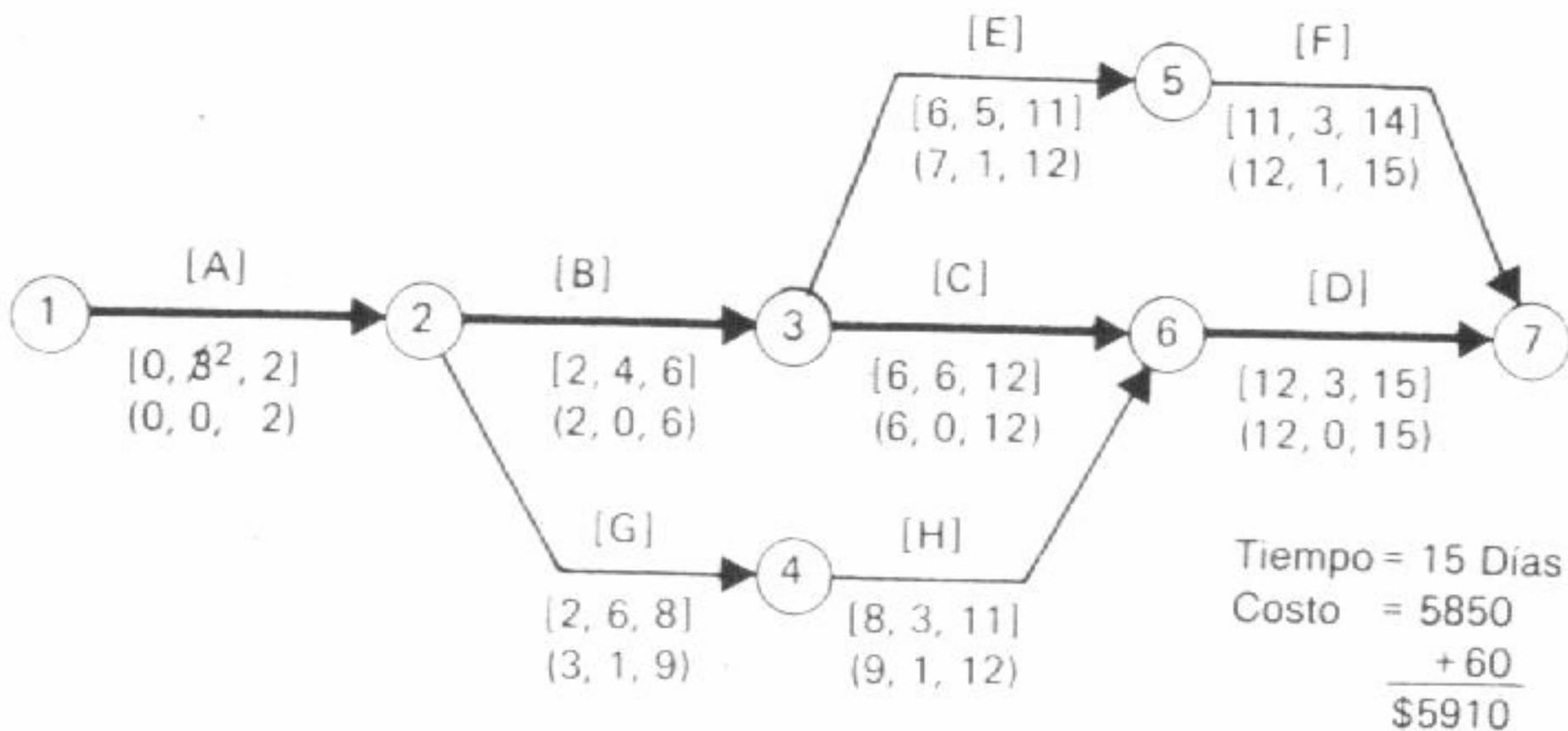


FIGURA 6-15. Red después de reducir A en un día

- * La ruta crítica sigue incluyendo las actividades A, B, C y D, pero las actividades A y D se han reducido a su máximo, por tanto, sólo las actividades B y C son elegibles para reducción.
- * Ambas actividades tienen el mismo costo de reducción por unidad de tiempo; sin embargo, reducir la actividad B reduce la longitud de dos rutas.
- * Por ello, debe reducirse enseguida la actividad B.



- * De la tabla de datos se observa que la máxima reducción para la actividad B es 2 días.
- * Esto indica que el tiempo de la actividad podría reducirse en 2 días en vez de uno solo; pero sólo puede hacerse una reducción de un día.
- * Si se redujeran 2 días en una sola etapa, podría pasarse por alto una ruta crítica paralela, lo cual daría como resultado una red no válida.
- * Por tanto, se reduce la actividad B en un solo día. La red resultante para esta etapa se muestra en la figura siguiente:



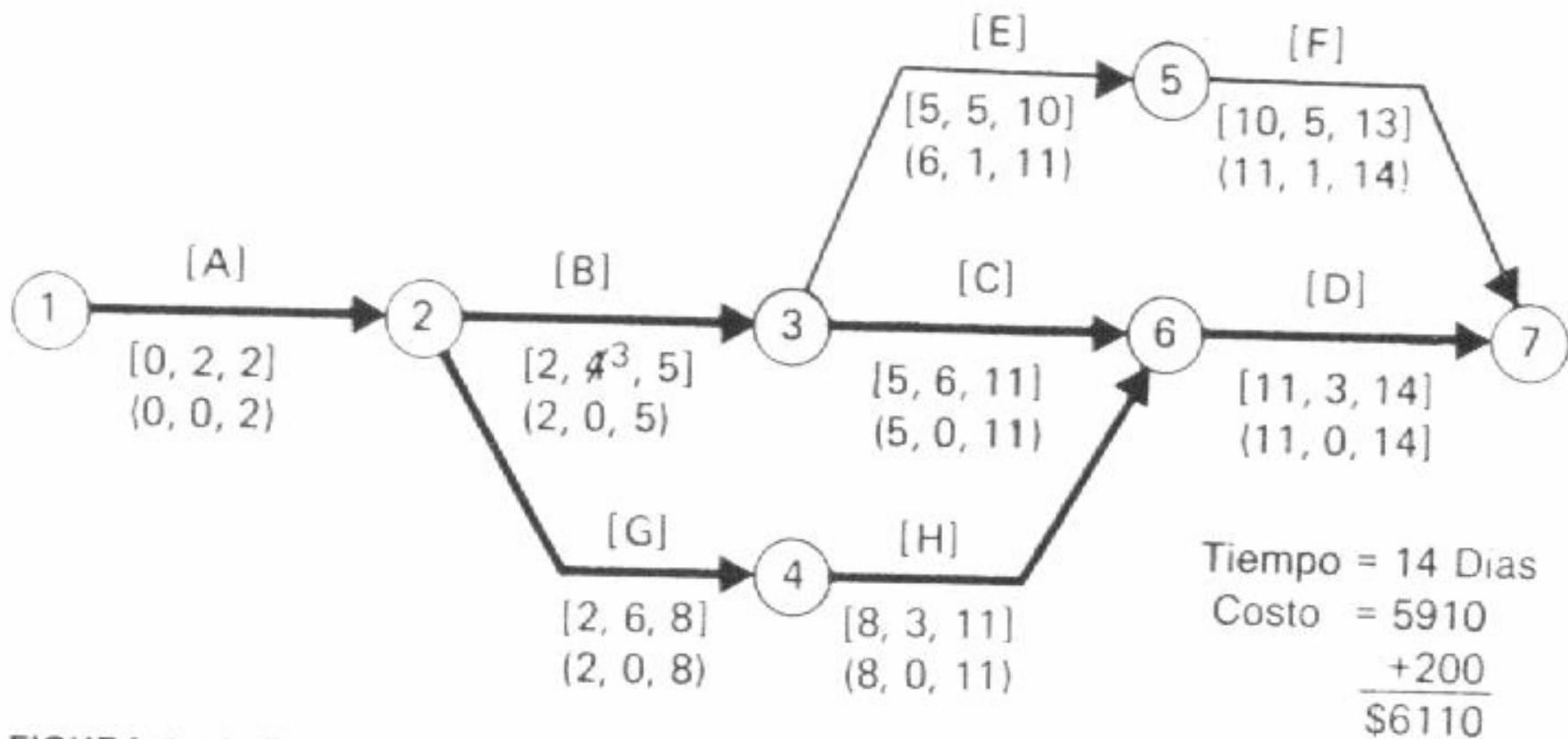


FIGURA 6-16. Red después de reducir B en un día

Al reducir B en un día, se crean dos rutas críticas: A-B-C-D y A-G-H-D.

Ambas actividades A y D, son comunes a las dos rutas; sin embargo, estas actividades se han reducido a su máximo.

Por tanto, debemos reducir en forma simultánea (en un día) una actividad en cada una de las rutas.

Puesto que la actividad B todavía puede reducirse en un día antes de llegar a su reducción máxima, es posible utilizar el mismo razonamiento que se empleó en la etapa anterior para elegir esta actividad para la ruta crítica A-B-C-D.

Dado que el costo de reducción por unidad de tiempo para la actividad G es menor que para la actividad H (obsérvese la tabla), debe decidirse reducir la actividad G en la ruta crítica A-G-H-D.

La red resulta después de reducir estas actividades en forma simultánea se muestra en la figura siguiente:



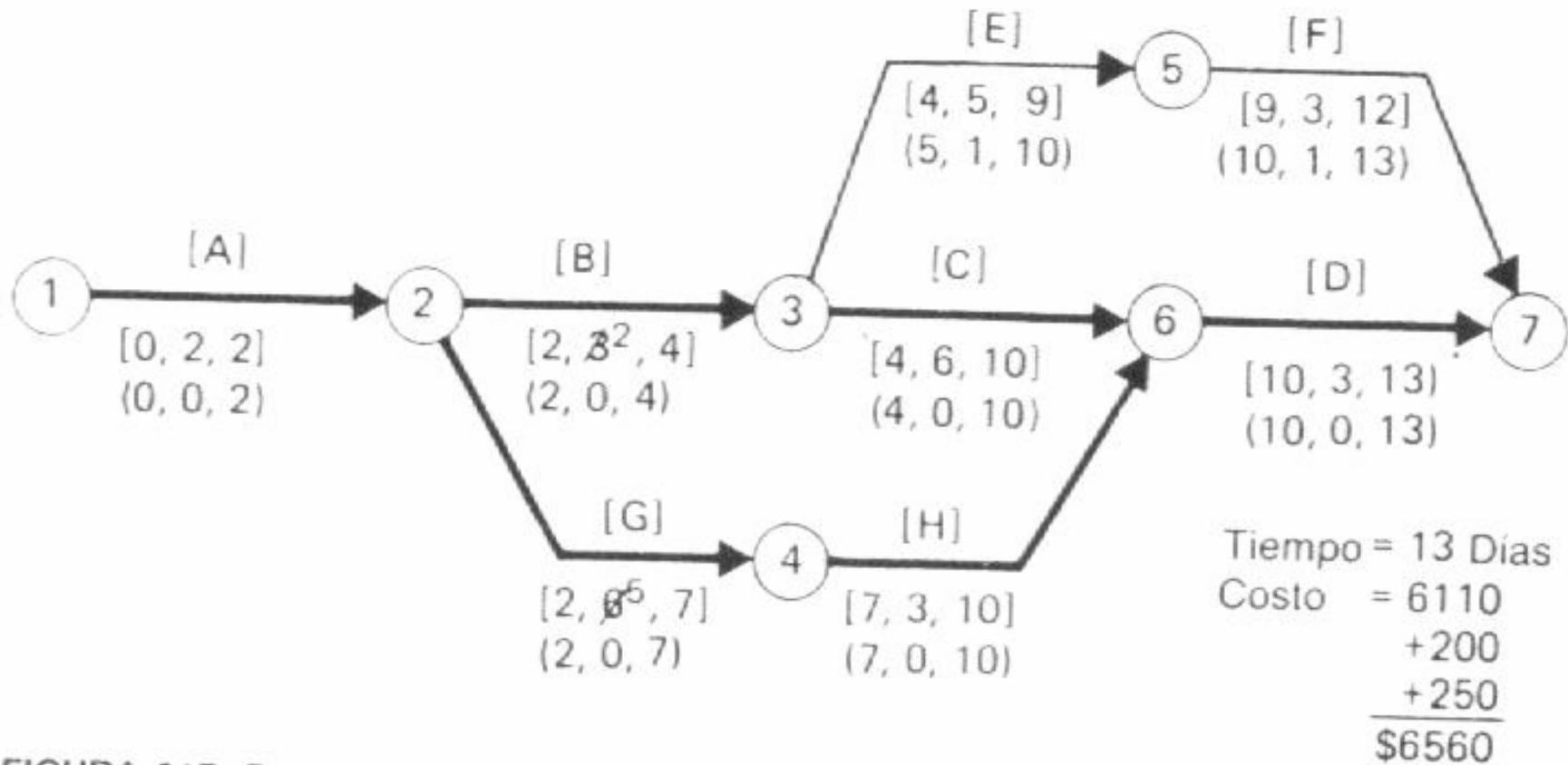


FIGURA 617. Red después de reducir B y G en un día

- * Obsérvese que con cada nueva red el costo se incrementa.
- * En la red inicial, el costo para el programa de 17 días era \$5800.
- * El programa de 13 días que se muestra en la figura da costos de \$6560.
- * En la figura anterior son críticas las mismas dos rutas que lo eran en la figura de 14 días, pero ahora las actividades B y G se han reducido al máximo.
- * Las únicas actividades restantes que son elegibles para reducción son las actividades C y H.
- * Reduciendo en forma simultánea estas actividades en un día cada una de ellas y volviendo a calcular las rutas críticas, se obtiene la red que se muestra en la figura siguiente:



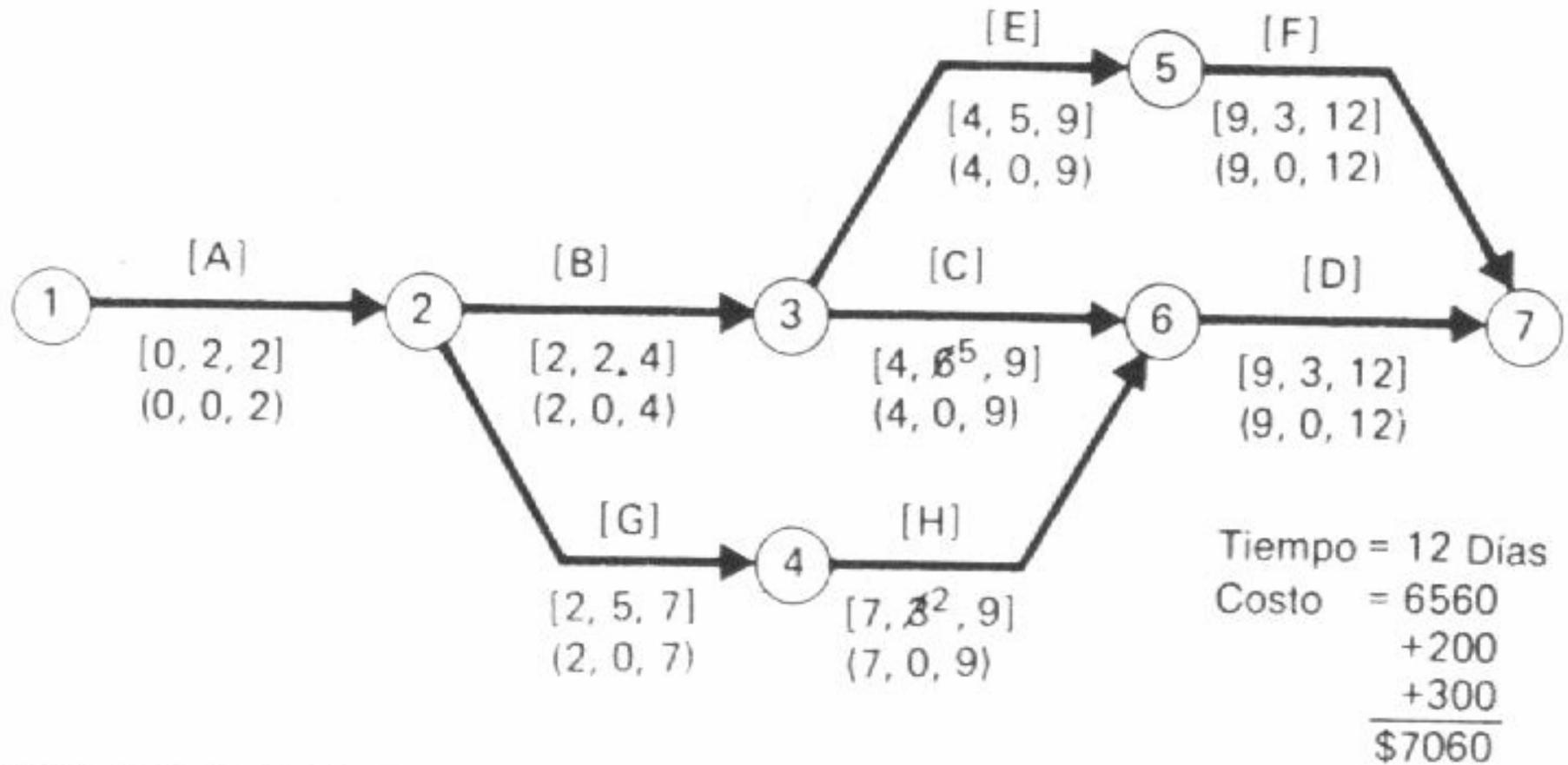


FIGURA 6-18. Red reducida en su totalidad

- * En este punto, todas las actividades de la red son críticas; por tanto, para hacer una mayor reducción en el tiempo total de proyecto, debe hacerse una reducción simultánea en las tres rutas críticas A-B-C-D, A-G-H-D y A-B-E-F.
- * Pero todas las actividades de la ruta A-B-C-D se han reducido al máximo; por lo tanto, la red completa se ha reducido a su máximo.



Resumen del proceso de reducción para el proyecto.

<i>No. Del Programa Del Proyecto</i>	<i>Tiempo de Terminación Del proyecto (día)</i>	<i>Costos Totales (\$)</i>	<i>Última Actividad reducida</i>	<i>Costos Por Día Que se ahorra</i>	<i>Actividades De La Ruta Crítica</i>
1	17	\$5800	Ninguna	-	A,B,C,D
2	16	\$5850	[D]	\$ 50	A,B,C,D
3	15	\$5910	[A]	\$ 60	A,B,C,D
4	14	\$6110	[B]	\$200	A,B,C,D
					A,G,H,D
5	13	\$6560	[B]	\$200	A,B,C,D
			[G]	\$250	A,G,H,D
6	12	\$7060	[C]	\$200	A,B,C,D
			[H]	\$300	A,B,E,F

- * Si se trazan en una gráfica los datos de “tiempo de terminación del proyecto” y “costos totales” que aparecen en las columnas respectivas de la tabla anterior, el resultado sería la curva de intercambio de tiempo y costo para el proyecto, y esta curva se muestra en la figura siguiente.
- * Esta curva presenta un resumen completo de los programas posibles y señala cuál es el programa más eficiente, así como también las sucesivas reducciones en el tiempo de terminación del proyecto.
- * Esto no quiere decir que el proyecto deba terminarse en 12 días, que es el tiempo mínimo de terminación; más bien, los administradores deben elegir el programa que satisfaga requerimientos tanto de tiempo como de costo.



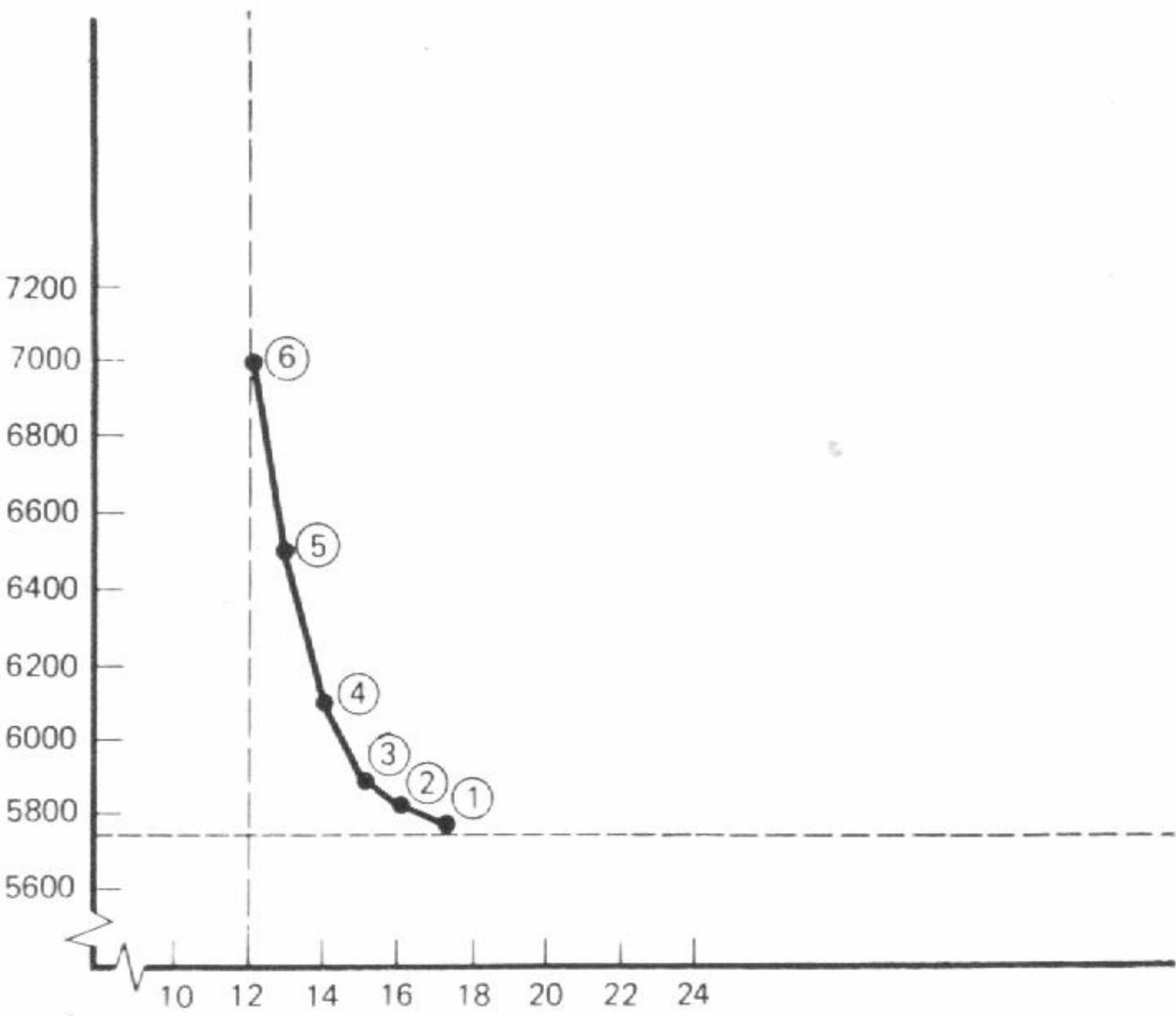


FIGURA 6-19. Curva de intercambio de tiempo y costo para el proyecto de ejemplo



PLANTEAMIENTOS MATEMÁTICOS



Un modelo de PL para la reducción de los tiempos de las actividades

x_i = tiempo de ocurrencia del evento i , en donde $i=1,2,3,4,5,6,7$

y_k = cantidad de tiempo de reducción para la actividad k , en donde $k=A,B,C,D,E,F,G,H$



- ✳ En el proceso de reducción, el objetivo consiste en minimizar el costo asociado con la reducción del tiempo total de terminación del proyecto.
- ✳ Esto se expresa en forma de una función objetivo como la minimización de la suma de los costos asociados de reducción.
- ✳ Para el proyecto de ejemplo de ocho actividades, esto es como sigue (véase la tabla del resumen de actividades, que contiene los datos asociados de costos):



MINIMIZAR

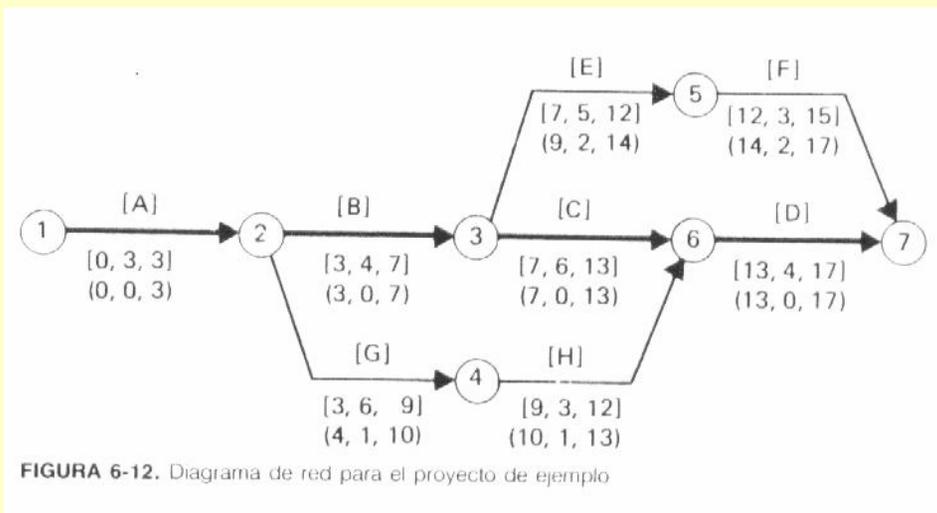
$$Z = 60yA + 200yB + 200yC + 50yD + 100yE + 0yF + 250yG + 300yH$$

Existen tres tipos de restricciones asociadas con el modelo: (1) las que se utilizan para describir la estructura de la red, (2) las que limitan los tiempos de reducción de las actividades y (3) las que están asociadas con la reducción de la fecha de terminación del proyecto.



- * Para elaborar las restricciones descriptivas, se escriben las condiciones de tiempos para los eventos (nodos) de la red. Estas condiciones son similares a las que se utilizaron en los procedimientos de *revisión hacia atrás* y *revisión hacia delante*, del proceso de la ruta crítica y se estructuran reconociendo que las siguientes relaciones deben cumplirse:
- * (1) el tiempo de ocurrencia de un evento (nodo) debe ser mayor o igual que el tiempo de terminación para todas las restricciones,
- * (2) el tiempo de iniciación para una actividad es igual al tiempo en el que ocurre el evento (nodo) precedente, y
- * (3) el tiempo real para una actividad es igual al tiempo normal (esperado) para la actividad, menos la magnitud del tiempo reducido.

- * Haciendo referencia a la figura e igualando el tiempo del evento 1 a cero ($x_1 = 0$), pueden escribirse restricciones descriptivas para cada uno de los eventos. El formato para desarrollar estas restricciones se expresa utilizando la siguiente relación:



$$\left(\begin{array}{l} \textit{Tiempo inicial} \\ \textit{para la} \\ \textit{actividad, es} \\ \textit{decir, tiempo} \\ \textit{de ocurrencia} \\ \textit{del evento} \\ \textit{inicial} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \textit{Tiempo normal} \\ \textit{(esperado) de la} \\ \textit{actividad} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \textit{Tiempo de} \\ \textit{urgencia de} \\ \textit{la actividad} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} \textit{Tiempo} \\ \textit{de} \\ \textit{ocurrencia} \\ \textit{para el} \\ \textit{evento} \\ \textit{final} \end{array} \right)$$

Entonces, las restricciones reales de los eventos son las siguientes:



SUJETO A:

$$x_1 \quad \quad \quad - 0$$

$$x_2 \quad \quad \quad + y_A \geq 2$$

$$- x_2 + x_3 \quad \quad \quad + y_B \geq 4$$

$$- x_2 \quad \quad + x_4 \quad \quad \quad + y_G \geq 6$$

$$+ x_3 \quad \quad + x_5 \quad \quad \quad + y_B \geq 5$$

$$- x_3 \quad \quad \quad + x_6 \quad \quad \quad + y_C \geq 6$$

$$\quad \quad - x_4 \quad \quad + x_6 \quad \quad \quad + y_H \geq 3$$

$$\quad \quad \quad - x_5 \quad \quad + x_7 + y_F \geq 3$$

$$\quad \quad \quad \quad - x_6 + x_7 + y_D \geq 4$$

$$y_A \leq 1$$

$$y_B \leq 2$$

$$y_C \leq 3$$

$$y_D \leq 1$$

$$y_E \leq 3$$

$$y_F \leq 0$$

$$y_G \leq 1$$

$$y_H \leq 1$$



EJEMPLO 2

PERT COSTO



- ✦ Para ilustrar la técnica de PERT/costo consideraremos la red de un proyecto de investigación y desarrollo de un nuevo producto en una empresa alimenticia.
- ✦ El total de actividades son siete, su descripción, relaciones de precedencia, tiempos y costos se especifican en la siguiente tabla:



ACTIVIDAD	DESCRIPCION	ACTIVIDAD PRECEDENTE	TIEMPO NORMAL (SEM)	TIEMPO DE URGENCIA (SEM)	COSTO NORMAL (\$)	COSTO DE URGENCIA (\$)	COSTO DE REDUCCION POR SEMANA
A	INV. DE MERCADO.	/	1	1	5000	5000	/
B	DES. DEL DISEÑO	A	3	2	5000	12000	7000
C	DES.DE ING. BAS. Y DE DETALLE.	A	7	4	11000	17000	2000
D	CONSTR. Y PRUEBA DEL PROTOTIPO.	B	5	3	10000	12000	1000
E	PRUEBAS DE MERCADO Y PUBLICIDAD.	B	8	6	8500	12500	2000
F	DET. COSTOS Y PRONOSTICOS.	C, D	4	2	8500	16500	4000
G	REPORTE FINAL	E, F	1	1	5000	5000	/
					Σ 53 000	Σ 80 000	

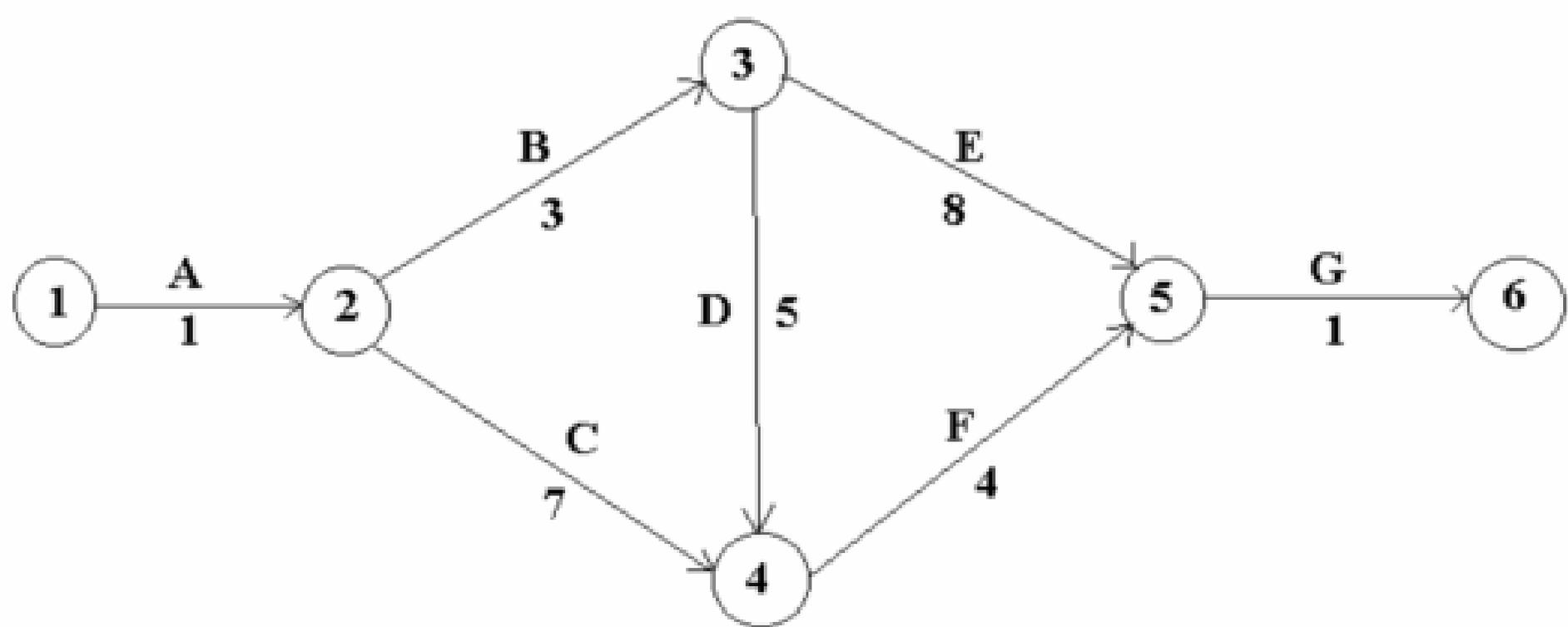
1. ¿Cuál es la red de actividades para este proyecto?
2. Identificar la ruta y el tiempo del camino crítico.
3. ¿Cuál es el costo marginal por concluir el proyecto en 12 semanas?
4. La gerencia de la empresa ha decidido canalizar recursos adicionales para terminar en el menor tiempo el proyecto.

¿Cuál es el menor tiempo para concluir el proyecto?

¿Cuál es, en dicha circunstancia, el costo total?

SOLUCIÓN





2) Ruta crítica: A-B-D-F-G

Tiempo: $1+3+5+4+1=14$ semanas ¿a que costo? \$ 53 000.00

3) Costo marginal por concluir el proyecto en 12 semanas: \$ 6 000.00

4) D se agotó: Reducir, combinadamente, una semana en E y F:

Duración: 11 semanas

costo: \$ 65 000.00

A-B-E-G = 11 semanas

A-B-D-F-G = 11 semanas

A-C-F-G = 11 semanas

E se agotó; Reducir, combinadamente, B y C en una semana: (+9000)

Duración: 10 semanas costo: \$ 74 000.00

A-B-E-G = 10 semanas

B se agotó:

A-B-D-F-G = 10 semanas

Actividades agotadas: D, E y B

A-C-F-G = 10 semanas

Ya no es necesario o conveniente desembolsar más recursos para tratar de reducir el tiempo de conclusión del proyecto, dado que no es viable.



DURACION DEL PROYECTO	COSTO MARGINAL	COSTO DEL PROYECTO (\$)
14 semanas	/	53 000.00
13 semanas	1 000	54 000.00
12 semanas	5 000	59 000.00
11 semanas	6 000	65 000.00
10 semanas	9 000	74 000.00
10 semanas	6 000	80 000.00