Planteamiento de problemas de programación lineal

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Ejemplo. Breeding Manufacturing Inc.

Mezcla de productos

- La Breeding Manufacturing Inc., fabrica y vende dos tipos de bombas hidráulicas: (1) normal y (2) extra grande.
- El proceso de manufactura asociado con la fabricación de las bombas implica tres actividades: ensamblado, pintura y pruebas (control de calidad).
- La contribución a las utilidades para la venta de una bomba normal es $50, en tanta que la utilidad par una bomba extra grande es $75.
- Existen disponibles por semana 4800 horas de tiempo de ensamble, 1980 de tiempo de pintura y 900 horas de tiempo de prueba. Las experiencias anteriores de venta señalan que la compañía puede esperar vender cuando menos 300 bombas normales y 180 de las extra grandes par semana.
- A la Breeding Inc le gustaría determinar la cantidad de cada tipa de bomba que debe fabricar semanalmente con el objeto de maximizar sus utilidades.

Los requerimientos de recursos para ensamble, pintura y prueba de las bombas se muestran en la tabla (medido en horas)

Tipo	*Tiempo de ensamble*	*Tiempo de pintado*	*Tiempo de prueba*
Normal	3.6	1.6	0.6
Extra grande	4.8	1.8	0.6

SOLUCION

- Este es un problema que se refiere a la *mezcla de productos* que maximice las utilidades.
- La Breeding debe decidir qué cantidad de cada una de los productos debe fabricar durante cualquier semana, tomando en consideración que existen ciertas limitaciones sobre las recursos (4800 horas de tiempo de ensamble, 1980 horas de tiempo de pintura y 900 horas de tiempo de pruebas).
- Para satisfacer la demanda semanal, la compañía debe fabricar 300 horas normales y 180 bombas extra grandes.

Para plantear el problema en términos matemáticos, pueden utilizarse las siguientes variables de decisión:

$X1$ = número de unidades de la *bomba normal* que deben fabricarse durante una semana determinada.

$X2$ = número de unidades de la *bomba extra grande* que deben fabricarse en una semana determinada

Puesto que el objetivo es maximizar las utilidades, las unidades de medición de la función objetivo se expresarían en dólares.

De análisis anteriores, sabemos que la forma general de la función objetivo es

$Z = \mathbf{C1}X1 + \boldsymbol{C2}X2$

Por ello, los términos c1x1 *y cx2* deben expresarse en dólares.

El coeficiente **C1** es la contribución a las utilidades que se obtiene para la venta de una unidad de la bomba normal, a *$50;* por otra lado *c2* es la contribución a las utilidades que se obtienen por la venta de cada bomba de tamaño extra grande, a $75.

Por tanto, el término C1X1 es:

($50/unidad de bomba normal) x (x1 unidades de la bomba extra grande)

y el término *C2X2* es:

($75/unidad de la bomba de tamaño extra grande) x (x2 unidades de la bomba extra grande)

Cuando se recopilan las unidades de medición para las operaciones, el resultado se expresa en dólares.

Por lo tanto, la función objetivo para el problema se expresa de la siguiente manera:

MAXIMIZAR $Z = 50x1 + 75x,$

Para desarrollar las restricciones del problema, es necesario identificar los coeficientes aij y determinar cuál es su relación con las variables de decisión (x1 y x2) y los recursos disponibles.

Al estructurar las restricciones, es necesario tener en cuenta las siguientes dos reglas generales.

1. Las unidades de medición del segundo término de una restricción (es decir, del lado derecho del signo de igualdad o desigualdad) siempre deben ser iguales a las unidades de medición del primer término, o lado izquierdo de la restricción.
2. No es necesario que todas las restricciones estén expresadas en las mismas unidades de medición (es decir, una restricción puede estar expresada en dólares, en tanto que una segunda restricción podría expresarse en horas, una tercera en libras, pies cuadrados o alguna otra unidad de medición).

Para el problema que se presenta se tienen tres restricciones sobre los recursos para la producción.

Se considera primero la restricción asociada con la operación de ensamble.

Dado que cada bomba normal requiere de 3.6 horas de tiempo de ensamble y dado que x1 es el número de unidades de bombas normales que se fabrican por semana, 3.6x1 es el número total de horas de ensamble que se requieren para fabricar bombas normales.

De manera similar, 4.8x2 es el número total de horas de ensamble que se requieren en la fabricación de bombas extra grandes.

Puesto que existen disponibles 4800 horas de tiempo de ensamble, la restricción a este respecto es:

3.6x1 horas + 4.8x2 horas = 4800 horas

La restricción asociada con la pintura es similar a la restricción de ensamble.

Se requieren 1 .6x_1 horas de tiempo de pintura para fabricar x, bombas normales y se requieren 1.8x_2 horas de pintura para fabricar x_2 bombas extra grandes.

Dado que existen disponibles por semana) 1980 horas de tiempo de pintura, la restricción es:

1.6x_1 horas + 1.8x_2 horas <= 1980 horas

Utilizando el mismo análisis de procedimiento, la restricción asociada con las pruebas es:

0.6x_1 horas + 0.6x_2 horas <= 900 horas

Las dos restricciones finales están asociadas con los niveles mínimos de ventas que se han proyectado.

Estas restricciones son relativamente fáciles de estructurar puesto que las unidades de medición están equilibradas en ambos miembros de las restricciones.

Estas restricciones son:

- (X1 unidades de la bomba normal) >= (300 unidades de la bomba normal)
- (x2 unidades de la bomba extra grande) >= (180 unidades de la bomba extra grande)

Reuniendo todas las restricciones y añadiendo las condiciones de no negatividad ($x1, x2 >= 0$) se tiene como resultado el siguiente modelo:

MAXIMIZAR: $Z = 50x1 + 75x2$

SUJETO A:

$3.6X1 + 4.8 X2 <= 4800$

$1.6X1 + 1.8 X2 <= 1980$

$0.6X1 + 0.6x2 <= 900$

$X1 >= 300$

$X2 >= 180$

$x1, x2 >= 0$

Ejemplo. D & M Power Products Inc.

Asignación del tiempo entre varias tareas

- La D & M Power Products Inc., fabrica tres tipos de aisladores de uso industrial en compañías de servicios electrónicos: aisladores de aplicación general, de aplicación especial y de alto voltaje.
- Cada producto pasa a través de tres operaciones de producción en la planta de la D & M: horneado, lavado y laminado y pulimiento.
- Sólo existe disponible una máquina en cada una de las respectivas operaciones.
- La tasa de producción (en unidades por hora) para cada tipo de aislador, y en cada operación, se muestran en la tabla siguiente.
- Los costos de las materias primas asociados con la fabricación de los aisladores son de $5 (aplicación general), $6 (aplicación especial) y $10 (alto voltaje).

Tasas de producción: D & M Power Products Inc.

Tipo de aislador	Horneado	Lavado y laminado	Pulimiento
De aplicación general	50	40	25
De aplicación especial	40	20	20
De alto voltaje	25	10	10

- Los costos por hora de las respectivas operaciones de producción son: $250 (horneado), $200 (lavado y laminado), y $100 (pulimiento).
- Los pesos unitarios de venta son $25, $39.75 y $67.50 para los tres productos, respectivamente.
- A la compañía le gustaría asignar el tiempo utilizado en las diferentes operaciones de manera que se maximicen las utilidades por hora.

SOLUCIÓN

Existen dos formas para plantear este problema:

1. Podrían definirse a x_1, x_2 y x_3 como las fracciones de cada hora que se dedican a fabricar cada producto en la operación de horneado; x_4, x_5 y x_6 serían las fracciones de tiempo en las que se utiliza la operación de lavado y laminado para fabricar cada producto; y x_7, x_8 y x_9 serían las fracciones que se utilizan en la máquina de pulir.
2. Un segundo método, consistiría en definir x_1, x_2 y x_3 como el número de cada uno de los tres aisladores que se fabrican por hora. Este enfoque nos exige determinar la fracción de hora que se requiere para elaborar una unidad de cada uno de los productos en cada operación.

La única restricción asociada con el problema es la capacidad de las máquinas.

Solo existe disponible una máquina en cada operación.

Sin embargo, esto no significa que todas las operaciones se efectúen en a su máxima capacidad; simplemente significa que en una operación no está disponible más del 100% de capacidad.

Las variables de decisión para el problema son:

X1 = número de unidades par hora de aisladores de aplicación general que se fabricarán

X2 = número de unidades par hora do aisladores de aplicación especial que se fabricarán

X3 = número de unidades por hora de aisladores de alto voltaje que se fabricaran

- Puede abordarse el problema de identificar los coeficientes del margen de utilidad (a contribución) para el problema examinando las unidades de medición asociadas con la ecuación general para la función objetivo.
- Recuérdese que nuestro objetivo consiste en maximizar utilidades par hora para la planta.
- Expresado en forma general, la función objetivo es de la siguiente forma:
- MAXIMIZAR Z = C1X1 + C2X2 + C3X3

en donde Z son las utilidades totales, expresadas en dólares por hora. Dada que x1, x2 y x3 se expresan en unidades por hora, la unidad de medición de c1, c2 y c3 debe ser también dólares por unidad, es decir.

$/hora = ($/unidad) (unidades par hora) + ($/unidad) (unidades por hora) +

($/unidad) (unidades por hora) = $/hora + $/hora + $/hora

Los cálculos para determinar las valores dc c1, c2 y c3 son:

La compañía puede hornear 50 aisladores de aplicación general por hora a un costo de $250 por hora; por tanto, cada aislador de este tipo cuesta $250/50 = $5/unidad.

Pero cada aislador de aplicación general también debe pasar a través del lavado y laminado y de la operación de pulimiento.

- Utilizando el mismo procedimiento que se usó para calcular el costo de producción para el horneado, los costos unitarios de producción para las dos operaciones restantes son $5 y $4 por unidad, respectivamente.
- Si se añaden los costos de materiales de $5 a los costos de producción para cada una de los aisladores de aplicación general que se fabrican, entonces el costa unitario total es $19.
- Dado que el precio de venta de este tipo de aisladores es $25, entonces c_1 es $6 por unidad.

Utilizando los mismos procedimientos, pueden calcularse los márgenes de utilidad para los otros dos productos.

TABLA. Cálculos del margen de utilidades: D & M Power Products Inc.

	Aislador de aplicación general	Aislador de aplicación especial	Aislador para alto voltaje
Costos de operación			
Horneado	$ 5.00	6.25	10.00
Lavado y laminado	5.00	10.00	20.00
Pulimiento	4.00	5.00	10.00
Costo de materiales	5.00	6.00	10.00
Costos totales	19.00	21.25	50.00
Precio de venta	25.00	39.75	67.50
Utilidad unitaria	$ 6.00	12.50	17.30

Los resultados de estos cálculos se muestran en la tabla siguiente, en la cual puede verse que $c2 = \$12.50$ por unidad y $c3 = \$17.50$ por unidad.

Por tanto, la función objetivo es

MAXIMIZAR: $Z = 6.00.x1 + 12.50x2 + 17.50x3$

Se requiere 0.02 (es decir, 1/50) de hora para hornear un aislador.

De manera similar, y dado que pueden fabricarse 40 aisladores de aplicación especial por hora en la operación de horneado, es necesario 0.025 de hora para hornear un aislador de aplicación especial.

Asimismo, se requiere 0.04 de hora para hornear un aislador de alto voltaje.

Dado que la máquina de horneado está disponible para una utilización completa en cualquier hora, la restricción asociada con la primera operación es:

$$0.02x_1 + 0.025x_2 + 0.04x_3 <= 1$$

Verificando la consistencia de las unidades de medición, se observa que:

(0.02 horas por unidad) x (x1 unidades/hora) + (0.25 horas par unidad) x (x2 unidades/hora) + (0.04 horas por unidad) x (x3 unidades/hora) <= 1

Si multiplicamos el factor (0.04 horas por unidad) (x3 unidades por hora) por 100, tendríamos el porcentaje de tiempo de cada hora que la operación de horneado se dedica a la elaboración de aisladores de aplicación general.

Podría llevarse a cabo una operación similar para los otros factores.

Entonces las unidades de medición asociadas con los factores aij xj son adimensionales y simplemente representan la parte de una hora que una máquina determinada se emplea para fabricar un producto especifico.

Utilizando un análisis similar, las restricciones de capacidad para las dos operaciones restantes son:

$0.025x1 + 0.050x2 + 0.\ 10x3 <= 1$ (operación de lavado y laminado)

$0.040x1 + 0.50x2 + 0.10x3 <= 1$(operación de pulido)

Añadiendo las condiciones de no negatividad (x1, x2, x3 >= 0), el planteamiento completo del problema es:

MAXIMIZAR: $Z = 6x1 + 12.50x2 + l7.50x3$

SUJETO A:

$$0.020x1 + 0.25x2 + 0.04x3 <= 1$$

$$0.025x1 + 0.050x2 + 0.10x3 <= 1$$

$$0.040x1 + 0.050x2 + 0.10x3 <= 1$$

$$X1, X2, X3 >=0$$

Ejemplo. Hickory Desk Company

Asignación de recursos limitados

- La Hickory Desk Company, un fabricante de muebles de oficina, produce dos tipos de escritorios: ejecutivos y secretariales.
- La compañía tiene dos plantas en las que fabrica los escritorios. La planta 1, que es una planta antigua, opera con doble turno 80 horas par semana.
- La planta 2 es una planta más nueva y no opera a su capacidad total.
- Sin embargo, y dada que los administradores planean operar la segunda planta con base en un turno doble como el de la planta 1, se han encontrado operadores para que trabajen los dos turnos.
- En estos momentos, cada turno de la planta 2 trabaja 25 horas par semana.
- No se paga ninguna prima adicional a los trabajadores del segundo turno.
- La tabla muestra el tiempo de producción (en horas par unidad) y los costos estándar (en dólares par unidad) en cada planta.

- La compañía ha competido con éxito en el pasado asignando un precio de $350 a los escritorios ejecutivos.
- Sin embargo, parece que la compañía tendrá que reducir el precio de los escritorios secretariales a $275 con el objeto de estar en posición competitiva.
- La compañía ha estado experimentando excesos de costos en las últimas ocho a diez semanas; por tanto, los administradores han fijado una restricción presupuestaria semanal sobre los costos de producción.
- El presupuesto semanal para la producción total de escritorios ejecutivos es $2000, en tanto que el presupuesto para los escritorios secretariales es $2200.
- A los administradores les gustaría determinar cuál es el número de cada clase de escritorios que deben fabricarse en cada planta con el objeto de maximizar las utilidades.

TABLA. Tiempo (horas) y costos (dólares)

	Tiempo de producción (horas/unidad)		Costos estándar (dólares/unidad)	
	Planta 1	Planta 2	Planta 1	Planta 2
Escritorios ejecutivos	7.0	6.0	250	260
Escritorios secretariales	4.0	5.0	200	180

SOLUCIÓN

Objetivo

La compañía necesita determinar el número de escritorios ejecutivos y secretariales que deben fabricarse en la planta 1 y los que deben fabricarse en la planta 2 con el objeto de maximizar las utilidades.

La utilidad por unidad en las respectivas plantas es la diferencia entre el precio de venta y los costos estándar.

Restricciones

1. No se dispone de más de 80 horas para la producción combinada de escritorios en la planta 1.
2. No se dispone de más de 50 horas para la producción combinada de escritorios en la planta 2.
3. Los costos asociados con la producción combinada de escritorios ejecutivos en las dos plantas no deben exceder $2000.
4. Los costos asociados con la producción combinada de escritorios secretariales en las dos plantas no deben exceder de $2200.

Variables (estructura matemática)

Dado que es necesario determinar la cantidad de cada tipo de escritorio que va a fabricarse en la planta 1 y en la planta 2, se requieren cuatro variables:

X1 = número de escritorios ejecutivos que se fabrican en la planta 1

X2 = número de escritorios secretariales que se fabrican en la planta 1

X3 = número de escritorios ejecutivos que se fabrican en la planta 2

X4 = número de escritorios secretariales que se fabrican en la planta 2

Coeficientes de la función objetivo (estructura matemática)

La función objetivo se expresará en dólares, puesto que el objetivo es maximizar utilidades; por tanto, los coeficientes cj se expresarán en dólares por unidad, dado que las xj están expresadas en unidades.

Los coeficientes cj se determinan encontrando la diferencia entre el precio de venta de un determinado tipo de escritorio y los costos estándar multiplicados en la fabricación de ese escritorio en la planta específica.

Por ello:

C1 = 350 - 250 = $100/escritorio ejecutivo fabricado en la planta 1

C2 = 275 -200 = $75/escritorio secretarial fabricado en la planta 1

C3 = 350 - 260 = $90/escritorio ejecutivo fabricado en la planta 2

C4 = 275 - 180 = $95/escritorio secretarial fabricado en la planta 2

Función objetivo (estructura matemática)

MAXIMIZAR: $Z = 100X1+75X2+90X3+95X4$

Restricciones (estructura matemática)

Es posible identificar y verificar la consistencia de las unidades de medición de los coeficientes aij y de los valores del segundo término al mismo tiempo que se desarrolla la estructura matemática de las restricciones.

Puesto que las unidades de medición pueden diferir de una restricción a otra, se considera cada una de ellas en forma separada.

1. Límite del tiempo de producción en la planta 1 (80 horas):

(7.0 libras por unidad) x (x1 unidades) +

(4.0 horas por unidad) x (x2 unidades) <= 80 horas

2. Límite del tiempo de producción en la planta 2 (50 horas):

(6.0 horas por unidad) x (x3 unidades) +

(5.0 horas por unidad) x (x4 unidades) <= 50 horas

3. Restricción de costos de los escritorios ejecutivos ($2000):

(250 dólares por unidad) x (x1 unidades) +

(260 dólares por unidad) x (x3 unidades) <= $2000

4. Restricción de costos de los escritorios secretariales ($2200):

(200 dólares por unidad) x (x2 unidades) +

(180 dólares por unidad) x (x4 unidades) <= $2200

Planteamiento matemático

MAXIMIZAR: $Z = 100x1 + 75x2 + 90x3 + 95x4$

Sujeto a:

$7.0x1 + 4.0x2 <= 80$

$6.0x3+5.0x4<=50$

$250x1 + 260x3 <= 2000$

$200x2 + 180\ x4 <= 2200$

$x1, x2, x3, x4 >= 0$

Ejemplo. Senora General Hospital

Dieta de costo mínimo

- La señora B.M. Haddox, dietista del Senora General Hospital, es responsable de la planeación y administración de los requerimientos alimenticios de los pacientes.
- La señora Haddox examina en estos momentos un caso de un paciente que se le ha restringido a una dieta especial que consta de dos fuentes alimenticias.
- Al paciente no se le ha restringido la cantidad de los dos alimentos que puede consumir; sin embargo, se deben satisfacer los siguientes requerimientos nutritivos mínimos por día: 1000 unidades del nutriente A, 2000 del nutriente B y 1500 unidades del nutriente C.
- Cada onza de la fuente alimenticia No. 1 contiene 100 unidades del nutriente A, 400 unidades de nutriente B y 200 unidades de nutriente C; cada una de la fuente alimenticia No. 2 contiene 200 unidades de nutriente A, *250* unidades del nutriente B y 200 unidades del nutriente C.
- Ambas fuentes alimenticias son algo costosas (la fuente No. 1 cuesta $6.00 por libra y la fuente No. 2 cuesta $8.00 por libra); por tanto, la señora Haddox desea determinar la combinación de fuentes alimenticias que arroje el menor costo y que satisfaga todos las requerimientos nutritivos.

SOLUCION

Objetivo

El objetivo en este caso consiste en determinar el número de onzas de cada una de las dos fuentes alimenticias que cuesten lo menos posible y que satisfagan los requerimientos nutritivos de los nutrientes A, B y C.

Un punto importante que debe reconocerse es que las unidades de medición para las fuentes alimenticias se expresan en onzas, en tanto que sus costos se expresan en libras.

Restricciones

1. Se deben consumir cuando menos 1000 unidades del nutriente A por día.
2. Se deben consumir cuando menos 2000 unidades del nutriente B por día.
3. Se deben consumir cuando menos 1500 unidades del nutriente C por día.
4. No existe restricción sobre la cantidad que se consume por día de cada una de las fuentes alimenticias.

Variables (estructura matemática)

Se requerirán dos variables, puesto que se desea determinar la cantidad que debe consumirse de dos fuentes alimenticias:

$X1$ = número de onzas de la fuente alimenticia No. 1 que debe consumirse diariamente

$X2$ = número de onzas de la fuente alimenticia No. 2 que debe consumirse diariamente

Función objetivo (estructura matemática)

El objetivo de éste problema consiste en minimizar costos.

El único ajuste que es necesario hacer a los coeficientes de costos es reconocer que en el esbozo del problema, los costos de las respectivas fuentes alimenticias se expresaran en libras y no en onzas.

Por tanto, ***c1*** = \$6.00/16 = 50.375 por onza y ***c2*** = \$8.00/16 = \$0.50 par onza, puesto que existen 16 onzas en cada libra de las respectivas fuentes alimenticias.

Entonces, la función objetivo puede expresarse de la siguiente manera:

MINIMIZAR: $Z = 0.375x1 + 0.50X2$

Restricciones (estructura matemática)

Se ha elaborado la tabla para ayudar a reestructurar las restricciones que le siguen.

TABLA. Datos de nutrientes: Senora General Hospital

UNIDADES POR ONZA			
Nutriente	*Fuente alimenticia no. 1*	*Fuente alimenticia no. 2*	*Unidades totales que se requieren*
A	100	200	1000
B	400	250	2000
C	200	200	1500

1. Restricción del nutriente A:

[(100 unidades del nutriente A)/(onza de la fuente No. 1)] + (x1 onzas de la fuente No. 1) + [(200 unidades del nutriente A)/(onza de la fuente No. 2)] x (x2 onzas de la fuente No. 2) >= 1000 unidades del nutriente A

2. Restricción del nutriente A:

[(400 unidades del nutriente B)/(onza de la fuente No. 1)] x (x1 onzas de la fuente No. 1) + [(250 unidades del nutriente B)/(onza de la fuente No. 2)] x (x2 onzas de la fuente No. 2) >= 2000 unidades del nutriente B

3. Restricción del nutriente C:

[(200 unidades del nutriente C)/(onza de la fuente No. 1)] x (x1 onzas de la fuente No. 1) + [(200 unidades del nutriente C)/(onza de la fuente No. 2)1 x (x2 onzas de la fuente No. 2) >= 1500 unidades del nutriente C

Planteamiento matemático

MINIMIZAR: $Z = 0.375x1 + 0.50x2$

SUJETO A:

$100x1 + 200x2 >= 1000$

$400x1 + 250x2 >= 2000$

$200x1 + 200\ x2 >= 1500$

$X1, X2 >= 0$

Ejemplo. Evans Oil Distributors

Variables de Decisión

x_1 = . Nùmero de barriles de gasolina 1 para fabricar gasolina normal

x_2 = . Nùmero de barriles de gasolina 2 para fabricar gasolina normal.

x_3 = . Nùemro de barriles de gasolina 3 para fabricar gasolina normal.

x_4 = . Nùmero de barriles de gasolina 1 para fabricar gasolina extra.

x_5 = . Nùmero de barriles de gasolina 2 para fabricar gasolina extra.

x_6 = . Nùmero de barriles de gasolina 3 para fabricar gasolina extra.

Función Objetivo

- Coeficientes

c1=21-22=-1	c4=24-22=2
c2=21-20=1	c5=24-20=4
c3=21-19=2	c6=24-19=5

$$Max\_Z = -x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4\, x_5 + 5\, x_5$$

Restricciones

$x_1 + x_4 \leq 32000$

$x_2 + x_5 \leq 20000$

$x_3 + x_6 \leq 38000$

$$\frac{4x_1}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{10x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{5x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 9$$

$$\frac{108x_1}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{90x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{73x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 80$$

$$\frac{4x_1}{x_4 + x_5 + x_6} + \frac{10x_2}{x_4 + x_5 + x_6} + \frac{5x_3}{x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

$$\frac{108x_1}{x_4 + x_5 + x_6} + \frac{90x_2}{x_4 + x_5 + x_6} + \frac{73x_1}{x_4 + x_5 + x_6} \geq 100$$

$x_i \geq 0$

$i = 1..6$