Planteamiento de problemas de programación lineal

M. En C. Eduardo Bustos Farías

Ejemplo. La empresa “Solidaridad Proletaria”

- La empresa “Solidaridad Proletaria” puede elaborar 4 productos que denota por 1, 2, 3, 4 y que produce en unidades bajo las siguientes condiciones.
- Existen 2 materias prima fundamentales con carácter limitado, nacional e importada.
- La materia prima nacional cuya disponibilidad es de 6 300 toneladas en el periodo, se puede utilizar en los 4 productos, con los coeficientes promedios de insumo por unidad de producto que a continuación se relacionan:

Producto	1	2	3	4
Insumo en Kg	250	150	180	210

- Para elaborar el producto 1 existe la opción de insumir materia prima de importación, con un coeficiente de insumo de 220 kgs.
- Por unidad de producto y se deberá disponer de un máximo de 800 toneladas en el periodo.
- La utilización de estas materias primas en un mismo producto es excluyente; es decir, si se insume una de ellas, no se puede consumir la otra.

- La estructura tecnológica de la fabrica contempla 2 departamentos restrictivos A y B, por los cuales tienen la opción de ser procesados los productos 1 y 2, mientras que los productos 3 y 4 deberán ser elaborados necesariamente en el depto. A.
- Y los insumos de minutos por unidad de producto son los siguientes:

Producto	1	2	3	4	Disponibilidad (minutos)
Depto. A	8	6	8	9	56 000
Depto. B	9	5	-	-	48 000

- Los cuatro productos están sujetos a un tiempo de almacenamiento.
- La capacidad de almacenaje para el periodo, así se dedica exclusivamente al producto 1, es de 16 000 unidades, o de 1400 unidades si al producto 2, o de 12 000 unidades producto 3, o de 13 500 unidades si al producto 4, o una combinación entre los productos, siempre y cuando no se sobrepase la capacidad.

- El plan estipula producir 6 000 unidades de A y 5 000 unidades de B, y a lo sumo 2000 unidades de C y 2 500 de D.
- Además el depto. De producción aconseja que la producción del producto C sea a lo sumo igual al 80% de la producción de D.
- Debido a un conjunto de circunstancias especificas, es conveniente tomar por función objetivo la maximización del nivel de producción.

Construcción del Modelo

variables de decisión

- Definamoslas. En un primer plano aparecen 4 productos; sin embargo, por un lado, el producto 1 puede ser elaborado opcionalmente a partir de 2 materias primas, lo cual implica diversidad de estructura tecnológica por insumo de materias primas, A o por el otro, los productos 1 y 2 pueden ser procesados por el Depto. A o por el Depto. B, lo cual denota diversidad de estructura tecnológica por diferente proceso de producción.

- Resumiendo para el producto 1 se requieren 4 variables, puesto que se necesita especificar que materia prima insume y el depto. Por el que pasa.
- Para el producto 2 se requieren 2 variables para denotar los deptos.
- Los productos 3 y 4 necesitan cada uno una variable al estar pre-establecidos el tipo de materia prima a utilizar y el depto. En el que serán procesados.
- Si un producto consume <u>necesariamente</u> mas de una materia y es procesado <u>necesariamente</u> por mas de un departamento, no tendrá diversidad tecnológica por estos conceptos, y por ende requerirá de una sola variable en este sentido.

Por tanto, las definiciones conceptuales y dimensiónales serán:

x1 - Unidades de producto 1 elaborado con materia prima nacional, y procesado en el Depto. A.

x2 - Unidades de producto 1 elaborado con materia prima nacional, y procesado en el Depto. B.

x3 - Unidades de producto 1 elaborado con materia prima importada y procesado en el Depto. A.

x4 - Unidades de producto 1 elaborado con materia prima importada y procesado en el Depto. B.

x5 - Unidades de producto 2 procesado en el depto. A.

x6 - Unidades de producto 2 procesado en el depto. B.

x7 - Unidades de producto 3.

x8 - Unidades de producto 4.

- Obsérvese que en la definición de las variables se ha omitido el tipo de materia prima porque consume una sola, la nacional, y por lo tanto es innecesario hacer constar este hecho en la definición de las variables.
- Un comentario análogo se aplica a las variables x7 y x8.
- Una vez definidas las variables se construye la condición de no negatividad:

$x_j \geq 0$ $\quad\quad$ $j = 1...8$

- Las restricciones son de recursos, capacidad de almacenaje, cumplimiento de planes y proporciones entre variables..

Restricciones de recurso : materia prima nacional

- La dimensión del “b1” es toneladas métricas de materia prima, y el signo de la restricción será de ≤ por ser una disponibilidad máxima.
- En esta restricción serán incluidas todas las variables menos las que representan al producto 1 con insumo de materia prima importada, o sea x3 y x4.
- Como que la dimensión del “b1” es toneladas de materia prima, y la de las variables de decisión en general es unidades de producto, el “aij” se definirá como toneladas de materia prima por unidad de producto.

- Al estar los datos planteados de la forma requerida, se multiplicaran los coeficientes por las variables, y se pasara su dimensión a fracción de tonelada en lugar de Kgs. Por lo tanto

$$0.25x_1 + 0.25x_2 + 0.15x_5 + 0.15x_6 + 0.18x_7 + 0.21x_8 \leq 6300$$

Materia prima importada

- La dimensión del “b2” es toneladas de materia prima; y el signo ≤. En esta restricción serán incorporadas solamente las x3 y x4 por los motivos expuestos respecto a la materia prima nacional. No resulta difícil apreciar que la restricción sería:

$$0.22x_3 + 0.22x_4 \leq 800$$

Tiempo disponible en los departamentos A y B

- El aspecto interesante de esta restricción es analizar cuales son las variables a incluir, puesto que resultan evidentes las restantes cuestiones.
- De la definición de las variables se aprecia que deberán estar presentes las siguientes: x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7 y x8. Por tanto, a partir de los datos de la tabla correspondiente se tendrá:

$$8x1 + 8\,x3 + 6\,x5 + 8x7 + 9x8 \leq 56\ 000$$

- La restricción del Depto. B, en forma análoga, se planteará

$$9x_2 + 9x_4 + 5x_6 \leq 48\,000$$

Restricción de capacidad de almacenaje

Al estudiar este tipo de restricción se observa:

- 1) que la capacidad no viene dada en magnitudes de recurso, sino en las unidades de los productos que pueden ser almacenado en el caso de que la capacidad se dedicara únicamente a cada uno de ellos;
- 2) además existe la conjunción disyuntiva "ó" y la posibilidad de almacenar mas de uno de ellos siempre y cuando no se sobrepase la capacidad, y
- 3) por ultimo esta restricción es valida para al menos dos variables.

Estas tres condiciones son necesarias para construir un tipo de restricción conocido por "capacidad unitaria".

- La primera dificultad radica en como definir dimensionalmente el “bi” dado que la capacidad no viene dada en magnitudes de recurso.
- Sin embrago lo común a todos los productos es que utilizan la capacidad en determinada proporción.
- Por ende, se puede definir la capacidad por unidad o el 100%.
- El signo de la restricción será el de ≤ puesto que se trata de una capacidad disponible.

- Como que los 4 productos en todas sus variantes requieren de almacenamiento, todas las variables serán incluidas en esta restricción.
- La definición del “aij” requiere de un análisis especial.
- Como que la dimensión del “b5” es capacidad, y la de las variables son unidades producto, el “aij” se deberá definir como

$$\left[\frac{\text{capacidad}}{\begin{array}{l}\text{Por unidad}\\ \text{De producto}\end{array}}\right]$$

- Sabemos que si toda la capacidad se dedicara, digamos, al producto 4, se podrían almacenar 13500 unidades, cada unidad se producto 4 utilizaría 1/13500 de la capacidad.
- Por lo tanto, todos los coeficientes se definirán de esta forma, es decir:

$$\frac{x_1}{16000}+\frac{x_2}{16000}+\frac{x_3}{16000}+\frac{x_4}{16000}+\frac{x_5}{14000}+\frac{x_6}{14000}+\frac{x_7}{12000}+\frac{x_8}{12000}\leq 1$$

Cumplimiento del plan

- Dado que para los productos 1 y 2 se plantean cumplimientos exactos, los signos de las restricciones correspondientes serán ecuaciones; mientras que para los productos 3 y 4 , signos de menor o igual que.
- Las variables a incluir en cada restricción se toman de la propia definición de las variables, es decir, para el producto1, las variables x1, x2, x3 y x4; para el producto 2, las x5 y x6, etc.
- Como que coinciden las dimensiones de los "bi" y las variables de decisión, el "aij" sera igual a la unidad.

Las restricciones son las siguientes:

$$
\begin{array}{llllllll}
x1 + x2 + x3 + x4 & & & & = 6000 \\
& x5 + x6 & & & = 5000 \\
& & x7 & & \leq 2000 \\
& & & x8 & \leq 2500
\end{array}
$$

Proporción entre variables

Cuando se especifique una restricción de proporciones entre variables, se recomienda el siguiente método:

1) se establece un cociente entre variables que se iguala al escalar que representa la proporción

$$\frac{x_i}{x_j} = a \qquad \textit{para } i \neq j,\ a$$

2) se despeja la variable del numerador

$xi = a\ xj$

3) se pasan todas las variables al miembro de la izquierda

$xi - a\ xj = 0$

En este problema se tendría $\frac{x_7}{x_8} \leq 0.8$;

y finalmente

$x_7 - 0.8x_8 \leq 0$

La función objetivo

- La construcción de la función objetivo es inmediata, puesto que todos los coeficientes son iguales a la unidad, y se plantea

$$\sum_{j=1}^{8} x_j = maxZ$$

Ejemplo. Dieta de costo mínimo

- Se le asigna a una unidad dietética la tarea diaria de producir al menos una tonelada de mezcla de ingredientes alimenticios, y que trata de minimizar el costo de elaboración, para lo cual puede adquirir los ingredientes X, Y, Z y W, cuyos costos en $ por Kg son respectivamente de 4, 2, 2, 4 y 3.
- La mezcla debe contener al menos el 20% del factor K, y el contenido del factor K en % de cada ingrediente es el siguiente:

Ingrediente	% factor K
K	18
Y	22
Z	25
W	15

Además el ingrediente X deberá representar entre el 25 y el 30% de la mezcla total.

Construcción del modelo

definición de las variables

$x1$ - Kgs de ingredientes Y a consumir diariamente

$x2$ - Kgs de ingredientes Y a consumir diariamente

$x3$ - Kgs de ingredientes Z a consumir diariamente

$x4$ - Kgs de ingredientes W a consumir diariamente

La condición de no negatividad:

$xj \geq 0 \quad (j = 1,4)$

Las restricciones

- La condición de elaborar al menos una tonelada de mezcla, tomando en cuenta que las variables están definidas en Kgs; se traduce en que el "b1" = 1000 Kgs, y a que signo es ≥.
- La mezcla como tal, es representada por la suma de las variables, o sea

$x1 + x2 + x3 + x4 \geq 1000$

- Respecto al factor K, el “b2” representará precisamente el contenido de K en la mezcla, que se representara por 0,2(x1 + x2 + x3 + x4), con el signo de ≥ al plantar un requisito mínimo. Las variables contenidas en la restricción serian todas y el “aij” se definiría como $\frac{factorK}{porunidad}$

que viene expresado precisamente por el porcentaje de ingrediente.

Por lo tanto:

$$0.18x_1 + 0.22x_2 + 0.25x_3 + 0.15x_4 \geq 0.20\sum_{j=1}^{4} x_j$$

- El contenido máximo y mínimo del ingrediente x es expresable mediante las inecuaciones

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \geq 0.25 \quad \text{y} \quad \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \leq 0.30$$

Que se transforman fácilmente en:
x1 – 0.25 (x1 + x2 + x3 + x4) ≥ 0
x1 – 0.30 (x1 + x2 + x3 + x4) ≥ 0

La función objetivo se plantearía:

$$\min Z = 4x1 + 2x2 + 2.4x3 + 3x4$$

Ejemplo. La cooperativa”Amistad Cubano-Angolana

- La cooperativa”Amistad Cubano-Angolana “ dispone de 1800 hectáreas que puede dedicar a cinco cultivos: tomate, lechuga, acelga, calabaza y papa.
- De los recursos que consume la cooperativa, el único planteado como restrictivo es la cantidad de hombre-días, que asciende a 4500.
- Las necesidades de hombres-días por ha, son los siguientes:

Cultivo	Tomate	Lechuga	Acelga	Papa	Calabaza
Hombres- Días	5	8	7	6	4

- Por razones de política agraria la cooperativa deberá dedicar al menos 100 hectáreas a la acelga, y la cantidad de hectáreas dedicadas a la papa deberá ser igual a 3 veces las dedicadas a la calabaza.
- La cooperativa desea maximizar la ganancia total, y sabe que las ganancias por hectárea para cada cultivo son las siguientes:

Cultivo	Tomate	Lechuga	Acelga	Papa	Calabaza
Ganancia	\$125	\$60	\$40	\$80	\$110

Construcción del modelo

La definición de las variables de decisión es la siguiente

$x1$ - Hectáreas dedicadas a tomate

$x2$ - Hectáreas dedicadas a lechuga

$x3$ - Hectáreas dedicadas a acelga

$x4$ - Hectáreas dedicadas a papa

$x5$ - Hectáreas dedicadas a calabaza

Condición de no negatividad

$xj \geq 0$

Las restricciones

- La primera se refiere a la disponibilidad de tierra. Como la dimensión de las variables y del “bi” es hectáreas, se plantearía

x1 + x2 + x3 + x4 + x5 ≤ 1800

- La segunda esta relacionada con los hombres-días disponibles, e incluye a todas las variables. Tomando en cuenta las dimensiones del “b2” y la de las variables, el “aij” se definiría como

$$\frac{\text{hom}\,bres - dias}{porhectaréa}$$

Como los datos vienen dados en esa misma forma, multiplicamos los coeficientes por las variables, es decir,

$$5x1 + 8\,x2 + 7\,x3 + 6\,x4 + 4\,x5 \leq 4500$$

La asignación mínima de 100 hectáreas a la acelga se plantea

$$x3 \geq 100$$

La relación proporcional entre x4 y x5 se formula

$$x4 - 3x5 = 0$$

Función Objetivo

$$\max Z = 125x1 + 60\ x2 + 40\ x3 + 80\ x4 + 110\ x5$$

Ejemplo. Producción de caña

- Al proceder el Estado Socialista Cubano a la nacionalización de los centrales azucareros, encontró dispersión geográfica entre zonas cañeras y los centrales, o sea que zonas cañeras aledañas a un central remitían sus cañas a otro central que se hallaba a unos 20 o 30 kilómetros de distancia, puesto que tanto aquellas tierras como el central pertenecían a un mismo propietario privado.
- El problema de que se trata no se reducía a una simple asignación de zonas cañeras a centrales en función de las capacidades de recepción de caña y las distancias, puesto que existen diferencias técnicas entre los centrales, y una misma caña puede ser procesada de forma mas o menos eficiente según el central de que se trate.
- En otras palabras era necesario conjugar las ventajas de las menores distancias con las de la eficiencia industrial, es consideración a las disponibilidades de caña y las capacidades de molida. Era, pues, necesario redistribuir las zona cañeras entre los centrales para minimizar los costos de transportación y de producción.
- Tomemos un ejemplo simplificado de esta situación que se refiere a 2 centrales que requieren distribuirse 2 zonas cañeras.

- Existen dos centrales cerca de la Bahía de Nipe en la provincia de Holguín (Nicaragua y Rafael Freyre), para los cuales se plantea revincular sus dos zonas cañeras de modo que se minimicen los costos de producción de azúcar y transportación de la caña.
- Es posible que una misma zona remita caña a los dos centrales.
- El costo de producción y transportación por arroba de azúcar para cada caso se ha calculado a partir de determinados rendimientos promedios, según se muestra a continuación :

Zona	Nicaragua	R. Freyre
I	$ 1.25	$ 1.30
II	1.80	1.60

- El central Nicaragua debe moler entre un mínimo de 20 millones de arrobas de caña y un máximo de 30 millones; y el central Rafael Freyre entre 15 y 25 millones de arrobas de caña.
- La zona I tiene una producción de caña estimada en 22 millones de arrobas; y la zona II, 26 millones. Se orienta que no debe quedar caña sin cortar.
- A continuación se muestran los factores de conversión de arrobas de caña necesarias para producir una arroba de azúcar, los cuales varían en cada central y zona cañera:

Zona	Nicaragua	R. Freyre
I	8,35	9,10
II	8,00	7,70

- La meta de producción para los dos centrales en su conjunto es por lo menos de 5,700 000 arrobas de azúcar.
- Todos los datos del problema corresponden a una zafra.

La construcción del modelo

Dado que existe diversidad de origen, destino y coeficiente económico la variable de decisión “azúcar” se descompone en cuatro variables.

Aunque las variables esenciales pueden definirse como azúcar o caña, se utilizara la definición de caña por resultar mas adaptable a las condiciones del problema, y se deja al lector el planteamiento si se define como azúcar; por lo tanto

$x1$ – miles de arrobas de caña de la zona I a moler en Nicaragua

$x2$ – miles de arrobas de caña de la zona II a moler en Nicaragua

$x3$ – miles de arrobas de caña de la zona I a moler en R. Freyre

$x4$ – miles de arrobas de caña de la zona II a moler en R. Freyre