

CAPÍTULO 1. MODELOS DE PREFERENCIAS

1. Introducción.....	2
1.1 Algunos conceptos básicos	2
1.2 El criterio de optimalidad paretiana.....	3
1.3 La normalización de los criterios.....	4
1.4 Procedimientos de Normalización De Criterios.....	4
1.5 La ponderación preferencial de los criterios	5
2. Relaciones de Sobreclasificación.....	6
2.1 ELECTRE	8
2.2 Estructura algorítmica del método ELECTRE.....	10
3. Teoría de la Utilidad Multiatributo.....	12
4. El Proceso Analítico Jerárquico.....	14
5. La programación multiobjetivo.....	17
5.1 Técnicas generadoras del conjunto eficiente.....	19
5.2 Programación compromiso	21
6. La Programación por Metas.....	25
6.1 Niveles de aspiración y variables de desviación.....	26
6.2 Variantes de la programación por metas	27
Algunos comentarios críticos.....	30
BIBLIOGRAFÍA	35
NOTAS.....	37

1. Introducción.

Los métodos multicriterio de ayuda a la decisión dan al tomador de decisiones algunas herramientas para hacerlo capaz de avanzar en la resolución de problemas de decisión donde muchos puntos de vista deben ser tomados en cuenta (frecuentemente contradictorios). El primer hecho que debe destacarse cuando se enfrenta a esta clase de problemas es que no existe, en general, ninguna decisión (solución, acción) la cual sea la mejor simultáneamente desde todos los puntos de vista. En este contexto la palabra optimización no tiene mucho sentido, en contraste a las técnicas clásicas de investigación de operaciones, los métodos multicriterio no obtienen "las mejores soluciones" (tales soluciones no existen). Por eso es esencial el uso de la palabra ayuda. Aquí agrupamos estos métodos en:

- ❖ El Proceso Analítico Jerárquico,
- ❖ La Teoría de la Utilidad Multiatributo,
- ❖ Las Relaciones de Sobreclasificación,
- ❖ Los métodos de optimización multiobjetivo y
- ❖ La Programación por metas.

1.1 Algunos conceptos básicos

Atributo. Este concepto se refiere a los valores con los que el centro decisor se enfrenta a un determinado problema decisonal. Para que estos valores se conceptualicen como atributos es necesario que puedan medirse independientemente de los deseos del centro decisor y a su vez sean susceptibles de expresarse como una función de las correspondientes variables de decisión.

Objetivo. Los objetivos representan direcciones de mejora de los atributos que estemos considerando. La mejora puede interpretarse en el sentido «más del atributo mejor» o bien «menos del atributo mejor». El primer caso corresponde a un proceso de maximización y el segundo a un proceso de minimización. Así, maximizar la fiabilidad

de un sistema, minimizar el coste de un proceso de producción, etc., son ejemplos típicos de objetivos. En general, los objetivos toman la forma: $\text{Max } f(x)$ o $\text{Min } f(x)$.

Nivel de aspiración. Representa un nivel aceptable de logro para el correspondiente atributo. La combinación de un atributo con un nivel de aspiración genera una meta.

En algunos casos, el centro decisor puede desear alcanzar exactamente el nivel de aspiración -es decir, no desea desviaciones por arriba ni por abajo con respecto al nivel de aspiración en tal caso, la expresión matemática de la meta será $f(x) = t$, siendo t el nivel de aspiración.

Las ideas y conceptos expuestos pueden clarificarse diciendo que, por ejemplo, la fiabilidad de un sistema es un atributo, maximizar dicha fiabilidad un objetivo y, finalmente, alcanzar una fiabilidad al menos igual a un determinado nivel de aspiración es una meta. Una meta puede representarse de la siguiente manera:

$$\text{ATRIBUTO} + \text{VARIABLES DE DESVIACIÓN} = \text{NIVEL DE ASPIRACIÓN}$$

Criterio es un término general que engloba los tres conceptos precedentes. Así, los criterios son los atributos, objetivos o metas que se consideran relevantes en un cierto problema decisional.

Por consiguiente el análisis de la decisión multicriterio constituye un marco general o paradigma en el que se investigan problemas decisionales con diferentes atributos, objetivos o metas.

1.2 El criterio de optimalidad paretiana

Un conjunto de soluciones es eficiente (o Pareto óptimas) cuando está formado por soluciones factibles (esto es, que cumplen las restricciones), tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los atributos.

Todos los enfoques multicriterio pretenden obtener soluciones que sean eficientes en el sentido paretiano que acabamos de definir.

1.3 La normalización de los criterios

La normalización es necesaria, al menos por los tres tipos de razones que exponemos seguidamente.

En primer lugar debe de tenerse en cuenta que en la mayor parte de los contextos decisionales las unidades en que están medidos los diferentes criterios suelen ser muy diferentes. En este tipo de situación, una comparación o agregación de los diferentes criterios carece de significado.

En segundo lugar debe asimismo tenerse en cuenta que en muchos problemas multicriterio, los valores alcanzables por los diferentes criterios pueden ser muy diferentes. En tales casos, sin una normalización previa de los criterios los métodos multicriterio pueden conducirnos a soluciones sesgadas hacia los criterios con valores alcanzables mayores.

En bastantes casos los centros decisores realizan con más facilidad las tareas comparativas entre criterios cuando trabajan con valores normalizados de los mismos en vez de con sus correspondientes valores originales.

1.4 Procedimientos de Normalización De Criterios

Uno de los métodos más simples consiste en dividir los valores que alcanza el criterio por su valor «mejor». El valor mejor es el máximo cuando el criterio consiste en un atributo del tipo «más mejor» o el mínimo cuando se trata de un atributo del tipo «menos mejor».

También pueden normalizarse los criterios, dividiendo los valores que alcanza el criterio por su recorrido. Se entiende por recorrido la diferencia entre el valor «mejor» y el valor «peor» alcanzado por cada criterio.

En algunos métodos multicriterio resulta conveniente que los valores normalizados de los criterios queden acotados en el intervalo [0,1]. Este tipo de normalización puede conseguirse con facilidad restando al «mejor» valor el que realmente alcanza el criterio, dividiendo seguidamente dicha diferencia por el correspondiente rango. Con este sistema de normalización el valor normalizado del criterio es 0 cuando el criterio alcanza su «mejor» valor y por el contrario es 1 cuando el criterio alcanza su «peor» valor.

1.5 La ponderación preferencial de los criterios

En muchos problemas decisionales resulta necesario obtener unos pesos o indicadores de las preferencias relativas del centro decisor por unos criterios con respecto a otros. Conviene indicar que así como la tarea de normalizar criterios requiere exclusivamente una información de tipo técnico, la estimación de las preferencias relativas conlleva una fuerte carga subjetiva lo que hace necesario que para estimar dichos pesos preferenciales tengamos que interaccionar de una manera u otra con el centro decisor. La forma más sencilla de abordar esta tarea consiste en pedir al centro decisor que clasifique los criterios por orden de importancia.

Es decir, si tenemos n criterios se solicita al centro decisor que asigne el número 1 al criterio que considere más importante, el número 2 al criterio siguiente en importancia hasta asignar el número n al criterio que considera menos importante. Los pesos compatibles con dicha información pueden obtenerse a partir de alguna de estas dos expresiones¹:

$$w_j = \frac{1/r_j}{\sum_{i=1}^n 1/r_i} \quad (1)$$

$$w_j = \frac{(n-r_j+1)}{\sum_{i=1}^n (n-r_i+1)} \quad (2)$$

donde r_j es el lugar o posición que ocupa el criterio j -ésimo en la clasificación establecida por el centro decisor.

Es interesante observar que con el procedimiento expuesto la suma de los pesos preferenciales obtenidos es igual a uno. Esta propiedad es bastante útil tanto para interpretar el significado de los pesos como para facilitar su uso por parte del centro decisor.

El procedimiento de estimar pesos preferenciales que acabamos de expresar, aunque tiene un claro interés práctico no está exento de dificultades. Así, con este enfoque tenemos en cuenta que el criterio i -ésimo es preferido al criterio j -ésimo, pero no tenemos en absoluto en cuenta la intensidad con la que el criterio i -ésimo es preferido al j -ésimo. Por otra parte, ordenar simultáneamente los n criterios es una tarea complicada para cualquier centro decisor, muy especialmente cuando el número n de criterios es elevado.

Este tipo de dificultades pueden superarse recurriendo a un procedimiento sugerido por Saaty² que constituye la base de la metodología multicriterio conocida por proceso analítico jerárquico. Este procedimiento requiere del centro decisor la comparación simultánea de sólo dos objetivos. Es decir, el centro decisor ha de realizar una comparación de valores subjetivos por «parejas».

Los valores numéricos que propone aplicar Saaty son los siguientes:

- (1) cuando los criterios son de la misma importancia;
- (3) moderada importancia de un criterio con respecto a otro;
- (5) fuerte importancia;
- (7) demostrada importancia; y
- (9) extrema importancia.

Asimismo, Saaty sugiere valores intermedios para juicios de valor contiguos. Aunque no puede hablarse del mejor método para estimar pesos preferenciales, sin embargo, siempre que las características del centro decisor permitan efectuar una interacción estructurada los métodos tipo Saaty basados en comparaciones por «parejas» parecen ofrecer una mayor solidez con respecto a otros métodos alternativos.

2. Relaciones de Sobreclasificación.

Familia de métodos de ayuda a la decisión, desarrollado inicialmente por Bernard Roy, en 1968, como una aproximación complementaria a la teoría de la utilidad multiatributo. Las relaciones de Sobreclasificación (outranking relationship) son métodos no compensatorios, ya que no están permitidos los intercambios de logros entre atributos (Flament, 1999).

El tipo de procesamiento de información es intradimensional, y la búsqueda de información es de eliminación por aspectos, de acuerdo al criterio de Hogarth (1991, p. 80).

Estos métodos surgen al aceptar incomparabilidades y al no imponer propiedades de transitividad. Ello significa que las preferencias no pueden ser expresadas por una única función numérica (Vincke, p. 11-3).

Los principios básicos de las relaciones de Sobreclasificación son:

1. La construcción del modelo de Sobreclasificación, el cual representa la preferencia total y el cual puede ser formado por uno o más valores o relaciones binarias.
2. La explotación del modelo de Sobreclasificación en función del problema a resolver (Vincke, p. 11-4).

Las relaciones de Sobreclasificación son utilizadas en los métodos ELECTRE (elimination and (et) choice translating algorithm), PROMETE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations), GAIA y en los análisis de concordancia en general. Se refiere a la comparación de dos alternativas respecto a todos los criterios mediante el uso de relaciones binarias.

Formalmente a supera a b ($a S b$) si existen suficientes motivos a favor de a (se trata de la concordancia en términos de cantidad de criterios o de peso de los criterios favorables) y si no se registran opiniones fuertemente contrarias a a (es la discordancia, ejercida como derecho de veto, medida como una gran diferencia de puntaje en a para alguno de los criterios bajo análisis). Cuando se verifican estas dos circunstancias, es posible afirmar que a supera a b .

En general dadas dos alternativas a y b es posible encontrar las siguientes situaciones:

$a S b$ o $b S a$,

$a S b$ y $b S a$, lo que implica que $a I b$ (a es indiferente o equivalente a b)

a y b son incomparables, es decir no se verifica ninguna de las circunstancias anteriores.

Las relaciones de Sobreclasificación no son necesariamente transitivas. Esto es, si $a S b$ y $b S c$, ello no necesariamente implica que $a S c$. Esto hace que este método sea simultáneamente práctico y ambiguo, a semejanza de multitud de casos que se encuentran en la vida cotidiana. La relación de Sobreclasificación en ELECTRE se determina aplicando índices de concordancia y de discordancia en forma simultánea.

Los métodos de sobrecalsificación han sido frecuentemente criticados por la falta de fundamentos axiomáticos. Aunque se ha trabajado en este sentido, por ejemplo las relaciones obtenidas por métodos ELECTRE no poseen ninguna propiedad en particular. En el caso de los métodos PROMETHEE si hay relaciones, pero su caracterización es aún un problema abierto (Vinke, p. 11-21).

Muchos elementos pueden ser tomados en cuenta para escoger un método de sobreclasificación, por ejemplo: qué tipo de resultado se desea obtener, qué tipo de información es posible obtener como datos de entrada y cuáles propiedades son consideradas como importantes para el método. (Vinke, p. 11-23).

Aunque se han aplicado los métodos de relaciones de Sobreclasificación en muchas aplicaciones completas no hay de ellos una descripción suficiente en las revistas internacionales. Principalmente por el hecho de que la descripción de un problema real de decisiones es un trabajo tremendo y no posee las características necesarias para ser publicado en una revista científica. Por otro lado, la reducción de la descripción del proceso decisorio a la aplicación estricta del método a un conjunto de datos no es muy interesante.

Buchanan (1999) propone una aplicación real de la metodología de la selección de un proyecto para una compañía de electricidad de Nueva Zelanda, utilizando el método ELECTRE III, Mauchant (1996) habla del contexto de programas como PROMETHEE y GAIA; Brams et al (1994), explica el uso de PROMETE, Abu -Taled et al (1994), propone el uso de PROMETHEE V en planeación de recursos del agua y Romero (1996) aplica ELECTRE I a la selección de un caza-bombardero.

2.1 ELECTRE

El método ELECTRE, básicamente, consiste en un procedimiento para reducir el tamaño del conjunto de soluciones eficientes. Tal reducción se realiza por medio de una partición del conjunto eficiente en un subconjunto de alternativas más favorables para el centro decisor (el núcleo) y en otro subconjunto de alternativas menos favorables. Para abordar tal tarea, se introduce el concepto de «relación de sobreclasificación» (outranking relationship) que es consustancial al ELECTRE en todas sus variantes.

Una elección o alternativa E_i sobreclasifica (outranks) a otra alternativa E_k cuando para los atributos considerados, el enunciado «la alternativa E_i es al menos tan buena como la alternativa E_k » es válido. La sobreclasificación se establece en base a dos conceptos: concordancia y discordancia. La concordancia cuantifica hasta qué punto para un elevado número de atributos E_i es preferida a E_k . Por otra parte, la discordancia cuantifica hasta qué punto no existe ningún atributo para el que E_k es mucho mejor que E_i .

Para que la alternativa E_i sobreclasifique a la alternativa E_k , y por tanto forme parte del núcleo o subconjunto de alternativas más favorables, es necesario que la concordancia entre E_i y E_k supere un umbral mínimo establecido y que asimismo, la discordancia entre E_i y E_k no supere otro umbral también establecido de antemano. Cuando esto sucede, puede decirse que la alternativa E_i es preferida a la alternativa E_k desde casi cualquier punto de vista, aunque ello no implique que E_i domine, desde un punto de vista paretiano, a E_k .

La principal ventaja de la relación de sobreclasificación es que en ella no subyace necesariamente el supuesto de transitividad de preferencias o de comparabilidad, que sí subyace a cualquier enfoque basado en funciones de utilidad. Así, si $E_1 S E_2$ y $E_2 S E_3$ (donde S representa la relación de sobreclasificación) esto no implica necesariamente que $E_1 S E_3$. Así el ELECTRE reconoce con acierto que las razones que llevan al centro decisor a preferir E_1 a E_2 y aquellas que le llevan a preferir E_2 a E_3 pueden ser muy diferentes y no conducir, por tanto, a que E_1 sea preferida a E_3 . En cuanto a la comparabilidad en muchos contextos decisionales, frecuentemente como sucede en la ingeniería de sistemas computacionales, el centro decisor no puede o no desea comparar alternativas debido, entre otras posibles razones, a falta de

información, insuficiente precisión en las mediciones, inconmensurabilidad de los criterios, etc.

La relación de sobreclasificación se utiliza para formar un grafo en el que cada vértice del mismo representa una de las alternativas o elecciones no dominadas. A partir de este grafo, se establece un subgrafo, que constituye el núcleo (kernel) del conjunto de alternativas favorables.

Los vértices del núcleo representan las alternativas o elecciones que son preferidas según la relación de sobreclasificación establecida en base a los índices de concordancia y discordancia. Los vértices (alternativas) que no forman parte del núcleo se eliminan del análisis.

2.2 Estructura algorítmica del método ELECTRE

Paso 1. Se parte de una matriz decisional (E_i, A_j) , así como de un vector de pesos W .

Paso 2. A partir de la matriz decisional (E_i, A_j) y del vector de pesos W se calcula la matriz de índices de concordancia de la siguiente manera. El índice de concordancia $c(i,k)$ entre las alternativas E_i y E_k se obtiene sumando los pesos asociados a los criterios en los que la alternativa i es mejor que la alternativa k ; en caso de empate se asigna la mitad del peso a cada una de las alternativas.

Paso 3. Se procede a normalizar los elementos de la matriz decisional inicial.

Paso 4. A partir de la matriz decisional normalizada, multiplicando cada columna de la misma por el peso preferencial correspondiente se obtiene la matriz decisional normalizada y ponderada.

Paso 5. De la matriz decisional normalizada y ponderada se deducen los índices de discordancia de la siguiente manera. El índice de discordancia $d(i,k)$ entre las alternativas E_i y E_k se calcula como la diferencia mayor entre los criterios para los que la alternativa i está dominada por la k , dividiendo seguidamente dicha cantidad por la mayor diferencia en valor absoluto entre los resultados alcanzados por la alternativa i y la k . A partir de los índices de discordancia se construye la matriz de índices de discordancia.

Paso 6. Se fija un umbral mínimo c – para el índice de concordancia, así como un umbral máximo d – para el índice de discordancia.

Paso 7. Se calcula la matriz de dominancia discordante de la siguiente manera. Cuando un elemento de la matriz de índices de concordancia (paso 2) es mayor que el valor umbral c – (paso 6) en la matriz de dominancia concordante se escribe un uno, en caso contrario, se escribe un cero.

Paso 8. Se calcula la matriz de dominancia discordante de la siguiente manera. Cuando un elemento de la matriz de índices de discordancia (paso 5) es menos que el valor umbral d – (paso 6) en la matriz de dominancia discordante se escribe un uno, en caso contrario, se escribe un cero.

Paso 9. Se calcula la matriz de dominancia agregada (concordante-discordante) multiplicando los términos homólogos de las matrices de dominancia concordante y de dominancia discordante calculados en los pasos 7 y 8 del algoritmo. La interpretación analítica de los elementos de esta matriz es muy intuitiva. Así, si el elemento ik toma el valor uno, esto significa que la alternativa i -ésima es mejor que la k -ésima para un número importante de criterios (concordancia) y no es claramente peor para ningún criterio (discordancia). Consecuentemente la alternativa i -ésima sobreclasifica a la k -ésima. Por el contrario, si el elemento ik toma el valor cero, esto significa que la alternativa i -ésima no es mejor que la k -ésima para un número importante de criterio y/o es claramente peor para algún criterio. Consecuentemente la alternativa i -ésima no sobreclasifica a la k -ésima.

Paso 10. Se determina el grafo ELECTRE. Para ello operamos de la siguiente manera. Cada alternativa representa un vértice del grafo. Del vértice i al vértice k se traza un arco, si y sólo si el correspondiente elemento de la matriz de dominancia agregada es uno. Operando de tal forma obtenemos el grafo ELECTRE. Dicho grafo constituye una representación gráfica de la ordenación parcial de preferencias de las alternativas consideradas. El núcleo del grafo ELECTRE está formado por aquellas alternativas que no se dominan (sobreclasifican) entre sí (esto es, no existen arcos de llegada en los correspondientes vértices), quedando además las restantes alternativas dominadas (sobreclasificadas) por alguna alternativa del núcleo (esto es, existe al menos algún vértice del núcleo del que sale un arco a los vértices que no forman parte del núcleo).

Consecuentemente con el análisis efectuado, las alternativas que no forman parte del núcleo se eliminan del proceso de elección.

3. Teoría de la Utilidad Multiatributo.

Fue desarrollada por Ralph L. Keeney y Howard Raiffa, en 1976. Busca expresar las preferencias del decisor sobre un conjunto de atributos o criterios en términos de la utilidad que le reporta, dentro de un contexto de la teoría de la decisión en condiciones de incertidumbre. Se trata de modelos de agregación de preferencias efectuadas respecto a criterios individuales, en los cuales se modelan las preferencias globales del decisor mediante una función de valor. La norma de comportamiento es el principio de la racionalidad.

Dos ventajas de estos modelos es el hecho de que pueden excluir cualquier incomparabilidad y que estas preferencias son transitivas (Vincke, p. 11-3)

Esta teoría se basa en los siguientes axiomas:

- ❖ Axioma 1. Maximización de la función de utilidad. Todo decisor intenta inconscientemente (o implícitamente) maximizar una función que agrega todos los puntos de vista relevantes del problema..
- ❖ Axioma 2. Tricotomía. Por otra parte, todo par de acciones a y b son susceptibles de ser comparadas, y existe un ordenamiento de preferencia bien definido sobre el conjunto de las acciones, de modo que para cualquier par de alternativas se tiene que:
 - o bien $a > b$, el resultado a es preferido al resultado b ,
 - o bien $a \sim b$, el decisor se encuentra en situación de indiferencia entre a y b ,
 - o bien $b > a$, el resultado b es preferido al resultado a .
- ❖ Axioma 3. Transitividad. Se asume que el orden de preferencia es transitivo, esto es, si se prefiere a a b y b a c , entonces se debe preferir a a c .

Del primer axioma si es interrogado el decisor acerca de sus preferencias, sus respuestas serán coherentes con una cierta función que no es conocida a priori. El papel del analista es el de estimar esta función mediante una adecuada serie de preguntas formuladas al decisor. Estos dos últimos axiomas garantizan la preservación de consistencia al comparar resultados. El propósito del método es asociar valores

numéricos a los resultados de la comparación, de modo tal que i) estos valores numéricos son ordenados consistentemente con las preferencias, y ii) se pueda determinar tales valores mediante algún tipo de procedimiento, para el cual se recurre a axiomas adicionales.

La técnica se basa aquí en dos pasos: primero la medición de la utilidad parcial de una alternativa con referencia a cada uno de los criterios, y luego proceder a la agregación de estas utilidades parciales para obtener la utilidad global de la acción bajo análisis.

En definitiva, las fases que se distinguen en la construcción de una función de utilidad son las siguientes:

- i) Identificación de la forma funcional apropiada
- ii) Construcción de las funciones de utilidad unidimensionales
- iii) Determinación de los parámetros de la función de utilidad multiatributo
- iv) Comprobación de la consistencia de la función de utilidad construida

Tanto para la determinación de la forma de descomposición, como para el cálculo de las funciones de utilidad unidimensionales y los factores de escala, se utilizan loterías.

Este modelo se basa en los supuestos de que:

- a) Los diferentes atributos son independientes
- b) El beneficio o valor general que resulta de la presencia de distintos atributos se obtiene de forma aditiva

A pesar de que el cumplimiento de estos supuestos no siempre se puede garantizar, la repercusión que tiene la violación de los mismos (robustez del modelo) es débil. Es posible el planteo de otros modelos de agregación de tipo multiplicativo, pero estos son más complejos y menos utilizados.

El modelo de agregación de las utilidades parciales en una utilidad total puede tomar dos formas, i) de tipo aditiva o ii) de tipo multiplicativa.

En i) es posible agregar las utilidades parciales sumándolas las unas con las otras (luego de haberlas multiplicado por una ponderación, o luego de haberlas modificadas mediante una transformación afín, o ambas a la vez). En el llamado modelo aditivo simple la utilidad global se expresa mediante la ecuación 3:

$$U(x) = p_1 u_1(x_{i1}) + p_2 u_2(x_{i2}) + \dots + p_m u_m(x_{im}) \dots \dots \dots (3)$$

dónde los p_j son los pesos o ponderaciones

las u_j son las utilidades subjetivas parciales

x_{ij} son las acciones bajo análisis

La expresión multiplicativa adopta la forma de la ecuación 4:

$$U(x) = [\alpha_1 + \beta_1 u_1(x_{i1})] \times [\alpha_2 + \beta_2 u_2(x_{i2})] \times \dots \times [\alpha_m + \beta_m u_m(x_{im})] \dots \dots \dots (4)$$

dónde los α_j y β_j son también pesos o ponderaciones (Flament, 1999).

Es un método compensatorio por que los intercambios de logros entre atributos están permitidos.

El procesamiento de información es interdimensional, y la búsqueda de información es variable, de acuerdo al criterio de Hogarth (1991, p. 80).

Aplicaciones de estos métodos son: el proyecto de localización de un nuevo aeropuerto en la Ciudad de México (Prawda, 1995, p. 70), otros problemas de localización (Buffa, 1994, p. 129), y exámenes para elegir candidatos (French, 1988, p. 138)

4. El Proceso Analítico Jerárquico.

Es un método desarrollado por Thomas L. Saaty en 1980, como una ayuda a la toma de decisiones ⁽³⁾, consiste en dividir una situación compleja y poco estructurada en sus partes que la componen; arreglando estas partes, o variables, en un orden jerárquico; asignando valores numéricos a juicios subjetivos sobre la importancia relativa de cada variable; y sintetizando los juicios para determinar cuales variables tienen la mayor prioridad y deben actuar bajo la influencia del resultado de la situación ⁽⁴⁾.

El proceso involucra estructurar un problema de un objetivo primario a niveles secundarios de objetivos. Una vez que estas jerarquías han sido establecidas, una matriz de comparación por pares de cada elemento, dentro de cada nivel es construido. Los participantes pueden sopesar cada elemento con cada uno de los otros elementos dentro de cada nivel, cada nivel está relacionado a los niveles sobre y debajo de éste, y

el esquema total es resuelto matemáticamente. El resultado es una clara afirmación prioritaria de un individuo o grupo ⁽⁵⁾.

Es especialmente adecuado para decisiones complejas las cuales involucran la comparación de elementos de decisión los cuales son difíciles de cuantificar. Está basado en el supuesto de que cuando nos enfrentamos con una decisión compleja la reacción humana natural es agrupar los elementos de decisión de acuerdo con sus características comunes ⁽⁶⁾.

Construcción descendente. Se comienza listando primero los atributos más globales, esto es, construyendo el árbol de valores de arriba hacia abajo, de lo general a lo particular. Es decir que todos los aspectos generales que se recopilaron en la definición del problema están presentes en esta primera instancia. Cada atributo propuesto deberá llevar aparejada una definición operativa. Al descomponer un atributo hay que procurar que los sub-atributos generados guarden una relación jerárquica con el principal, evitando que se establezcan relaciones con otros principales. Se termina de agregar cuando las últimas ramas son susceptibles de ser valoradas por cualquier procedimiento.

Construcción ascendente. En este caso el proceso se desarrolla a la inversa. Se producen todas las características que permiten diferenciar entre las alternativas y posteriormente se construye la estructura agrupando aquellas que mantienen un factor común, que será denominado luego. En muchos casos al decisor le cuesta mucho trabajo generar el procedimiento ascendente que, de alguna manera supone un cierto grado de elaboración sobre el material, lo cual no es siempre el caso. Cuando el decisor no está muy familiarizado con el problema, la elaboración de lo particular a lo general es más recomendable. Este procedimiento consiste en listar todas las características que ayudan a distinguir entre las alternativas.

La parte medular del proceso de Saaty se encuentra en el mecanismo de obtención de pesos mediante la comparación de a pares: en cada nivel de la jerarquía, se efectúa una comparación de a pares (pairwise), tomando en cuenta la "contribución" de cada elemento de esa jerarquía respecto de cada uno de los vértices inmediatamente superiores con los cuales se encuentra vinculado. La comparación de a pares se realiza en términos de "razones o tasas de preferencia" si se trata de alternativas o de "razones

de importancia" si se trata de criterios, sobre la base de una escala numérica propuesta por Saaty. Puede ocurrir que en el proceso de comparaciones se obtenga algún grado de inconsistencia. El algoritmo planteado por Saaty es un cálculo de autovectores que permite una aproximación razonable de las razones estimadas respecto a las comparaciones hechas por el decisor.

Valores globales. Se dispone de alternativas: a, b, c, d, ...y los atributos o criterios son C_1, C_2, C_3, \dots , cuyos pesos son $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$

Los pesos locales de alternativas y/o atributos son obtenidos mediante el procedimiento de comparaciones binarias y con la escala propuesta por Saaty: $W_1, W_2, W_3, \dots, W_r$

En consecuencia, el valor global de una alternativa genérica x_i es la mostrada por la ecuación 5:

$$V(x_i) = \sum p_i v_i(x) \dots\dots\dots(5)$$

Donde la suma se extiende a todos los criterios posibles.

Interdependencia de los elementos de una jerarquía. El método clásico de Saaty establece cómo obtener prioridades de los elementos de una jerarquía y cómo obtener el conjunto de prioridades globales cuando los elementos de cada nivel son independientes. Con mucha frecuencia dichos elementos son interdependientes y se plantea entonces el problema de enfrentar dichas interdependencias a efectos de obtener las adecuadas prioridades del problema. Hay dos clases principales de interdependencias entre elementos de un nivel de jerarquía que fueron estudiadas por Saaty y su equipo: la interdependencia sumativa y la interdependencia sinérgica. Para ambos problemas se han aportado respuestas en el contexto de redes de retroalimentación y de supermatrices de las que se obtienen las prioridades globales de las alternativas (Flament, 1999).

La metodología del proceso analítico jerárquico involucra los pasos siguientes:

1. Entendimiento del problema de decisión y definición del objetivo total de la solución del problema;
2. Identificación o diseño de alternativas;
3. Identificación de criterios relevantes y/o subcriterios;

4. Construcción de un modelo del proceso analítico jerárquico;
5. Hacer comparaciones por pares de los elementos en un nivel con respecto a los elementos en el siguiente nivel que sirven como un criterio o propiedad común. Este proceso crea una matriz de comparación por pares. Si hay muchos tomadores de decisiones participando múltiples juicios pueden ser sintetizados por el uso de herramientas geométricas;
6. Usando la matriz creada en el paso anterior, se calculan los pesos derivados locales de los elementos comparados;
7. Se prueba la consistencia por el cálculo de la razón de consistencia;
8. Se repiten los pasos 5, 6 y 7 para todos los elementos en todos los niveles de la jerarquía;
9. Se sintetiza la totalidad de pesos para los elementos en el menor nivel;
10. Se evalúa la consistencia total (⁷).

Un modelo de evaluación jerárquica es construido usando herramientas de un programa de computadora basado en el proceso analítico jerárquico, tales como: el Programa de Toma de Decisiones Expertas y el de Elección Experta. En años recientes el proceso analítico jerárquico ha sido usado para muchas diferentes aplicaciones incluyendo planeación estratégica, ubicación de recursos y la selección de la mejor alternativa (⁸).

Este método es compensatorio, ya que en la estrategia de lección los intercambios de logros entre atributos (trade-offs) están permitidos (Flament, 1999).

La búsqueda de información es variable y el tipo de procesamiento es interdimensional, de acuerdo al criterio de Hogarth (1991, p. 80).

Otras aplicaciones del proceso analítico jerárquico son en el campo médico (Primare Care Institute, 1997), en proyectos de priorización de transporte (⁹), en problemas de desarrollo organizacional (Oddershede, 1991).

5. La programación multiobjetivo

La programación multiobjetivo -también llamada optimización vectorial- constituye un enfoque multicriterio de gran potencialidad cuando el contexto decisional está definido por una serie de objetivos a optimizar que deben de satisfacer un determinado conjunto

de restricciones. Como la optimización simultánea de todos los objetivos es usualmente imposible (pues en la vida real entre los objetivos que pretende optimizar un centro decisor suele existir un cierto grado de conflicto) el enfoque multiobjetivo en vez de intentar determinar un no existente óptimo pretende establecer el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas.

Planteado el problema en estos términos, la estructura general de un programa multiobjetivo puede representarse esquemáticamente de la siguiente manera:

$$Eff\ f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_l(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})] \quad \dots(6)$$

sujeto a:

$$\mathbf{x} \in F$$

donde:

Eff significa la búsqueda de soluciones eficientes o Pareto óptimas.

$f_i(\mathbf{x})$ = Expresión matemática del atributo *i*-ésimo.

\mathbf{x} = Vector de variables de decisión.

F = Conjunto de restricciones -usualmente lineales- que definen el conjunto de soluciones posibles.

Debe de indicarse que la búsqueda de soluciones eficientes puede establecerse en un sentido maximizador cuando «más del atributo mejor» o en su sentido minimizador cuando «menos del atributo mejor».

El propósito del enfoque multiobjetivo consiste en segregar del conjunto de soluciones posibles un subconjunto propio del mismo cuyos elementos gocen de la condición de optimalidad paretiana. Debe de indicarse que la programación multiobjetivo aborda tal tarea utilizando una información estrictamente técnica (restricciones, expresiones matemáticas de los atributos, etc) sin incorporar al análisis ninguna información sobre las preferencias del centro decisor. Planteado el problema en estos términos, la operatividad de la programación multiobjetivo consistirá en desarrollar una serie de

técnicas que permitan a partir de la estructura de ecuaciones generar el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas.

5.1 Técnicas generadoras del conjunto eficiente

Los métodos más utilizados para generar, o al menos aproximar, el conjunto eficiente son: el método de las ponderaciones, el método de las restricciones y el simplex multicriterio. Seguidamente pasamos a exponer los rasgos básicos de cada uno de estos métodos.

En el método de las ponderaciones se multiplica cada objetivo por un peso o factor no negativo, procediéndose seguidamente a agregar todos los objetivos ponderados en una única función objetivo.

La optimización de dicha función ponderada y agregada genera un elemento del conjunto eficiente. Por medio de la parametrización de los pesos asociados a los objetivos se va aproximando el conjunto eficiente o conjunto de soluciones Pareto óptimas. Así, en un problema multiobjetivo con n objetivos a maximizar la aplicación del método de las ponderaciones conduce al siguiente programa lineal paramétrico:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \quad \dots(7)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathbf{F} \\ \lambda &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Para cada vector de pesos λ se obtiene un elemento del conjunto eficiente. Debe de apuntarse que el método de las ponderaciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando los pesos son estrictamente positivos (p.ej. $\lambda > 0$). Pasamos seguidamente a exponer los rasgos básicos del llamado método de las restricciones. Con este método se optimiza uno de los n objetivos esto es, se trata como función objetivo propiamente dicha mientras que los demás objetivos se incorporan al conjunto de restricciones como restricciones paramétricas. Para cada conjunto de valores que se de al vector de

términos independientes, o término de la derecha, se genera un elemento del conjunto eficiente.

Así, en un problema multiobjetivo con n objetivos a maximizar, la aplicación del método de las restricciones conduce al siguiente nuevo programa lineal paramétrico:

$$\text{Max } f_j(\mathbf{x}) \quad \dots(8)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{x}) &\geq H_i \quad i=1,2, \dots, j-1, j+1, \dots, n && \dots(9) \\ \mathbf{x} &\in F \end{aligned}$$

Variando paramétricamente los términos de la derecha H_i iremos generando los elementos del conjunto eficiente. Debe de apuntarse que el método de las restricciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando las restricciones paramétricas de (9) son activas en el óptimo.

El Simplex multicriterio genera todos los puntos de esquina (corner points) eficientes de un problema multiobjetivo desplazándose para ello de un punto esquina al punto esquina contiguo. El algoritmo del Simplex tradicional constituye el mecanismo adecuado para efectuar este tipo de desplazamiento de un punto de esquina a un punto adyacente, por medio de una operación de pivotado. En combinación con esta operación de salto de un punto de esquina a otro, el Simplex multicriterio recurre a una subrutina que permite comprobar la eficiencia o no de cada punto obtenido. El Simplex multicriterio trabaja eficientemente sólo con problemas de un tamaño reducido. Entendiendo por tamaño reducido, problemas con un número de objetivos inferior a cinco, así como un número de variables y restricciones no superior a cien¹⁰.

La programación multiobjetivo, tal como la hemos presentado en los apartados anteriores, puede considerarse como la primera etapa de un proceso decisional. En efecto, con la aplicación de este enfoque conseguimos particionar el conjunto factible en dos subconjuntos: el subconjunto de soluciones paretianamente eficientes y el subconjunto de soluciones dominadas, o inferiores. La partición del conjunto factible se ha realizado de una manera mecánica, sin tener en cuenta las preferencias del centro

decisor. En todo caso, una vez que las soluciones inferiores han sido eliminadas, puede decirse que comienza el proceso decisional propiamente dicho. Para abordar tal tipo de tarea, tendremos que introducir de una manera u otra las preferencias del centro decisor.

5.2 Programación compromiso

El primer paso dentro del enfoque compromiso consiste en establecer lo que Zeleny llama el punto o la alternativa ideal¹¹. Las coordenadas de la alternativa ideal vienen dadas por los valores óptimos de los correspondientes objetivos, forzando el proceso de optimización al cumplimiento de las restricciones del problema. El punto o alternativa ideal se puede representar por medio del siguiente vector:

$$\mathbf{f}^* = (f_1^*, \dots, f_1^*, \dots, f_n^*) \quad \dots (10)$$

siendo:

$$f_i^* = \text{Max } f_i(\mathbf{x}) \quad \dots (11)$$

sujeto a :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F} \quad \dots (12)$$

cuando se pretende maximizar los n objetivos. Cada elemento del vector \mathbf{f}^* se denomina «punto ancla». La alternativa ideal es usualmente inalcanzable.

Obviamente, si dicha alternativa fuera alcanzable, ello implicaría que no existe conflicto alguno entre los n objetivos, por lo que de hecho no existiría ningún problema de elección multicriterio, pues la alternativa ideal \mathbf{f}^* sería la elección óptima.

Cuando el punto o alternativa ideal es inalcanzable, la elección óptima o mejor solución compromiso viene dada por la solución eficiente más próxima al punto ideal. Esta regla de comportamiento suele denominarse axioma de Zeleny, pues fue este investigador quien lo propuso en 1973. De acuerdo con este postulado, dadas las soluciones f_1 y f_2 , la solución preferida será aquella que se encuentre más próxima al punto ideal. Dependiendo de la métrica que se elija tendremos diferentes funciones de distancia, lo que nos permitirá establecer diferentes conjuntos compromiso. Para abordar tal tarea,

comenzaremos por definir el grado de proximidad existente entre el objetivo i -ésimo y su ideal o valor ancla:

$$d_j = [f_j^* - f_j(\mathbf{x})] \quad \dots (13)$$

Una vez definido el grado de proximidad d_j el paso siguiente consistirá en agregar los grados de proximidad para todos los objetivos de nuestro problema. Ahora bien, hay que tener en cuenta que usualmente los objetivos están medidos en unidades distintas, por lo que la suma de los grados de proximidad no tiene sentido o significado, al carecer de homogeneidad dimensional. Por tanto, habrá que proceder a la normalización de los objetivos. Por otra parte, los valores absolutos de los niveles de logro de los diferentes objetivos pueden ser muy diferentes, lo que refuerza la necesidad de una normalización, si queremos evitar soluciones sesgadas hacia los objetivos que pueden alcanzar valores mayores. Una posible forma de normalizar los objetivos es la siguiente:

$$d_j = \frac{[f_j^* - f_j(\mathbf{x})]}{[f_j^* - f_{\bar{j}}]} \quad \dots(14)$$

donde d_j representa el grado de proximidad del objetivo j -ésimo normalizado y $f_{\bar{j}}$ es el anti-ideal de dicho objetivo, i.e. el peor valor posible para el objetivo j -ésimo sobre el conjunto eficiente. El grado de proximidad normalizado está acotado entre 0 y 1. Así, cuando un objetivo alcanza su valor ideal, su grado de proximidad es cero; por el contrario, dicho grado se hace igual a uno cuando el objetivo en cuestión alcanza un valor igual al anti-ideal. Si representamos ahora por W_j las preferencias que el centro decisor asocia a la discrepancia existente entre la realización del objetivo j -ésimo y su ideal, la programación compromiso –consistente en la búsqueda de las soluciones eficientes más próximas el ideal- se convierte en el siguiente problema de optimización:

...(15)

$$\text{Min } L_x = \left[\sum_{j=1}^n W_j \left[\frac{f_j^* - f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{sj}} \right]^\pi \right]^{\frac{1}{\pi}}$$

sujeto a: $\mathbf{x} \in F$

El parámetro π representa la métrica que define la familia de funciones de distancia. Es decir, para cada valor del parámetro π tendremos una distancia en concreto. Así, la distancia tradicional o euclidiana es un caso particular de la expresión (15); esto es, el que corresponde a $\pi = 2$. Para $\pi = 1$, la mejor solución compromiso, o punto más próximo al ideal se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } L_1 = \sum_{j=1}^n W_j \frac{f_j^* - f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{sj}} \quad \dots(16)$$

sujeto a: $\mathbf{x} \in F$

Es fácil comprobar que la maximización de la función objetivo (16) es equivalente a la siguiente maximización:

$$\text{Max } \sum_{j=1}^n W_j \frac{f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{sj}} = \text{Max } \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(\mathbf{x}) \quad \dots(17)$$

donde: $\alpha_j = W_j / (f_j^* - f_{sj}) \quad \dots(18)$

Para la métrica $\pi = \infty$, se minimiza la máxima desviación de entre todas las desviaciones individuales; esto es, para $\pi = \infty$ sólo la desviación mayor influye en el proceso de minimización. Para esta métrica, la mejor solución compromiso o punto más próximo al ideal se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } L_{\infty} = D \quad \dots(19)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \alpha_1 [f_1^* - f_1(\mathbf{x})] &\leq D \\ &\vdots \\ \alpha_n [f_n^* - f_n(\mathbf{x})] &\leq D \end{aligned} \quad \dots(20)$$

donde las α fueron definidas anteriormente.

Para obtener la mejor solución compromiso para métricas distintas de $\pi = 1$ y $\pi = \infty$, se hace necesario recurrir a algoritmos de programación matemática no lineal, lo que constituye indudablemente una dificultad operativa. No obstante, esta dificultad queda considerablemente reducida si tenemos en cuenta un importante resultado introducido en la literatura por Yu⁽⁵⁾. Así, este autor demostró que, para problemas con dos objetivos, los puntos L_1 y L_{∞} definen un subconjunto de la frontera eficiente denominado por Zeleny¹² conjunto compromiso. Las otras mejores soluciones compromiso pertenecen al conjunto acotado por dichos puntos L_1 y L_{∞} . Posteriormente, Freimer & Yu¹³ demostraron que, para problemas con más de dos objetivos, los puntos L_1 y L_{∞} no tienen que definir necesariamente un conjunto compromiso. Dicho con otras palabras, en contextos de más de dos objetivos, para métricas distintas de $\pi = 1$ y $\pi = \infty$, pueden existir soluciones compromiso que no pertenezcan al intervalo cerrado $[L_1, L_{\infty}]$.

Aunque la posibilidad apuntada por Freimer & Yu es cierta, sin embargo es poco probable que se presente en la práctica, por lo que la potencialidad de la programación compromiso se mantiene al no ser necesario usualmente computar complicados modelos de programación matemática no lineal.

Es asimismo interesante comentar que en el punto L_{∞} se satisfacen las siguientes relaciones entre objetivos¹⁴:

$$\alpha_1 [f_1^* - f_1(\mathbf{x})] = \dots = \alpha_i [f_i^* - f_i(\mathbf{x})] = \dots = \alpha_n [f_n^* - f_n(\mathbf{x})] \quad \dots(21)$$

es decir, la solución asociada al punto L_{∞} es una solución bien equilibrada, pues las discrepancias ponderadas y normalizadas entre el valor alcanzado por cada objetivo y sus respectivos ideales son iguales.

El carácter equilibrado de la solución -- dota a este punto de un especial atractivo desde un punto de vista de elección. En efecto, muchos centros decisores pueden centrar su atención en la elección de soluciones equilibradas en el siguiente sentido; no a unos excesivos gastos en alimentación en detrimento de los gastos en vestidos, demasiados gastos para vacaciones en detrimento de los gastos en educación, etcétera.

Puede decirse que la solución L_1 corresponde a una situación en la que se maximiza la suma ponderada de los logros de cada objetivo, traduciéndose en algo así como en un punto de máxima eficiencia, pero que puede estar fuertemente desequilibrado. Por el contrario, en la solución L_{∞} subyace una lógica de equilibrio en vez de una lógica de eficiencia.

6. La Programación por Metas.

La utilidad de los métodos expuestos antes se reduce considerablemente en problemas decisionales de un tamaño elevado. Así, un problema con seis atributos, varios cientos de variables de decisión y de restricciones, no es computacionalmente abordable a través de métodos de optimización multiobjetivo. Para enfrentarse a este tipo de problemas de gran dimensión hace falta recurrir a procedimientos más flexibles. Dentro de esta línea pragmática puede encuadrarse la programación por metas (goal programming).

La programación por metas se apoya en una lógica no optimizante sino en lo que Simon¹⁵ ha acuñado como lógica satisfaciente. El premio Nobel Simon conjetura que en las complejas organizaciones actuales, el contexto decisional está definido por información incompleta, recursos limitados, multiplicidad de objetivos, conflictos de intereses, etc. Simon conjetura que en este tipo de contexto el centro decisor más que optimizar una o varias funciones objetivo intenta que una serie de metas relevantes se aproximen lo más posible a unos niveles de aspiración fijados de antemano. Este tipo de complejidad se encuentra presente en muchos problemas relacionados con la planificación, diseño o explotación de sistemas. Por tanto, parece adecuado que en el

contexto de esta presentación se de una visión, aunque sea introductoria, de la programación por metas.

El embrión de la programación por metas surge en 1955 en un artículo de Charnes, Cooper y Ferguson¹⁶, publicado en Management Science, en el que se aplica el concepto a un problema de regresión condicionada para analizar un problema de fijación de salarios para ejecutivos. No obstante, pese a la potencialidad del enfoque, hasta mediados de los años setenta las aplicaciones de la programación por metas son bastante escasas. Sin embargo, a partir de esa fecha y debido principalmente a los trabajos seminales de Lee¹⁷ e Ignizio¹⁸ se produce una enorme eclosión de trabajos en los que se desarrollan tanto aspectos teóricos de la programación por metas como aplicaciones de este enfoque a áreas muy diversas. Puede decirse que la programación por metas ha sido y todavía es el enfoque multicriterio más utilizado en la práctica¹⁹.

6.1 Niveles de aspiración y variables de desviación

Para formular un modelo de programación por metas, igual que sucede con los demás enfoques multicriterio, comenzamos por fijar los atributos que consideremos relevantes para el problema que estemos analizando. Una vez establecidos los atributos, asignamos a cada uno de ellos un nivel de aspiración. Entendemos por nivel de aspiración t_i el nivel de logro que el centro decisor desea alcanzar para el atributo i -ésimo. A continuación, conectamos el atributo con el nivel de aspiración por medio de las variables de desviación negativa y positiva, respectivamente. De esta forma completamos la estructura de la meta i -ésima cuya expresión algebraica es:

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \quad \dots(22)$$

donde, $f_i(\mathbf{x})$ representa la expresión matemática del atributo i -ésimo, t_i , el nivel de aspiración asociado a dicho atributo, n_i y p_i las variables de desviación negativa y positiva respectivamente. La variable de desviación negativa cuantifica la falta de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración, mientras que la variable de

desviación positiva juega el papel opuesto; es decir, la cuantificación del exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

Una vez definidas las metas y aclarado el significado de las variables de desviación pasamos a introducir un concepto esencial en programación por metas: variables de desviación no deseadas. Una variable de desviación se dice que es no deseada cuando al centro decisor le conviene que la variable en cuestión alcance su valor más pequeño (esto es, cero). A un nivel expositivo elemental podemos considerar los siguientes tres casos:

- a) La meta deriva de un atributo del tipo más del atributo mejor (equivalente a un objetivo a maximizar). Ejemplos de este tipo de metas pueden ser: el beneficio de un plan de producción, la fiabilidad de un sistema, etc. En estos casos la variable no deseada (a minimizar), será la variable de desviación negativa (cuantificación de la falta de logro).
- b) La meta deriva de un atributo del tipo menos del atributo mejor (equivalente a un objetivo a minimizar). Ejemplos de este tipo de metas pueden ser: el costo de un proceso de producción, el consumo de un motor, etc. En estos casos la variable no deseada (a minimizar), será la variable de desviación positiva (cuantificación del exceso de logro).
- c) La meta deriva de un atributo del que se quiere alcanzar exactamente su nivel de aspiración. Ejemplos de este tipo pueden ser: volumen de un contenedor, nivel de capturas en un problema de gestión pesquera, etc. En estos casos tanto la variable de desviación negativa como la positiva son variables no deseadas y por tanto variables a minimizar.

6.2 Variantes de la programación por metas

El propósito general de la programación por metas consiste en minimizar las variables de desviación no deseadas. El proceso de minimización puede acometerse de diferentes maneras. Cada método o manera conduce a una variante diferente de la programación por metas. Seguidamente pasamos a exponer los rasgos fundamentales de las variantes más utilizadas.

Comenzaremos con la variante denominada programación por metas ponderadas. Con este enfoque se engloba en una función objetivo agregada todas las variables de desviación no deseadas convenientemente ponderadas. La estructura algebraica de un modelo de programación por metas ponderadas es la siguiente:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m (\alpha_i n_i + \beta_i p_i) \quad \dots(23)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i &= t_i \quad i=1, \dots, m \\ \mathbf{x} &\in \mathbf{F} \\ \mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{n} \geq 0 \quad \mathbf{p} \geq 0 \end{aligned} \quad \dots(24)$$

donde α_i y β_i representan los pesos o factores de ponderación asociados a las variables de desviación negativa y positiva para la meta i -ésima y \mathbf{F} el conjunto alcanzable o conjunto de restricciones. Obviamente, los pesos β tomarán el valor cero cuando se desea que el logro de la meta sea mayor que el nivel de aspiración establecido. De igual manera, los pesos α tomarán el valor cero cuando se desea que el logro de la meta sea menor que el nivel de aspiración establecido.

La segunda variante corresponde a la programación por metas lexicográficas. Este enfoque utiliza el concepto de prioridad o peso excluyente (pre-emptive priorities). Este tipo de peso excluyente implica que el logro de las metas situadas en una cierta prioridad es inconmesurablemente preferido al logro de cualquier otro conjunto de metas situadas en una prioridad mas baja. En la programación por metas lexicográficas, las metas situadas en prioridad más alta se satisfacen en la medida de lo posible, sólo entonces se considera la posible satisfacción de metas situadas en prioridades más bajas. Es decir, las preferencias se ordenan igual que las palabras en un léxico o diccionario, de ahí la denominación de programación por metas lexicográficas.

Para completar la conceptualización de los modelos basados en metas lexicográficas debemos de introducir el concepto de función de logro (achievement function). La función de logro está formada por un vector ordenado cuya dimensión coincide con el numero de niveles de prioridad que se hallan establecido. Cada componente de este

vector representa las variables de desviación que hay que minimizar, con objeto de conseguir la máxima realización posible de las metas situadas en la correspondiente prioridad. La estructura general de la función de logro es la siguiente:

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = [h_1(\mathbf{n}, \mathbf{p}), h_2(\mathbf{n}, \mathbf{p}), \dots, h_q(\mathbf{n}, \mathbf{p})] \quad \dots(25)$$

o de una manera mas simple:

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q] \quad \dots(26)$$

La minimización lexicográfica de los vectores (25) o (26) implica la minimización ordenada de sus componentes; esto es, se minimiza la primera componente \mathbf{a}_1 de la función de logro, seguidamente se minimiza la segunda componente \mathbf{a}_2 respetando el valor de \mathbf{a}_1 previamente obtenido, y así sucesivamente. La estructura algebraica de un modelo de programación por metas lexicográficas es la siguiente:

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_q]$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, m \\ f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i &= t_i \\ \mathbf{x} &\in F \\ \mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{n} \geq 0 \quad \mathbf{p} \geq 0 \end{aligned} \quad \dots(27)$$

Los modelos basados en metas lexicográficas no pueden resolverse por una aplicación directa del Simplex. En efecto, en un contexto lexicográfico lo que se busca es el mínimo valor de un vector ordenado y no el valor mínimo del producto escalar de dos vectores.

Para abordar un proceso de minimización lexicográfica existen diferentes enfoques algorítmicos, de ellos tal vez el más intuitivo y operativo sea el método secuencial. Este método consiste en resolver una secuencia de programas lineales. El primer programa

de la secuencia minimiza la primera componente del vector de logro, sujeta esta minimización a las restricciones (igualdades) correspondientes a la primera prioridad. El segundo programa lineal minimiza la segunda componente de la función de logro sujeta esta nueva minimización a las restricciones (igualdades) correspondientes a las dos primeras prioridades, así como a no degradar los valores de las variables de desviación de la prioridad primera que se obtuvieron en la solución precedente. El procedimiento secuencial continua hasta resolver el último programa lineal. Una excelente exposición tanto de la fundamentación teórica como de la mecánica operativa de este método secuencial puede verse en un artículo de Ignizio & Perlis²⁰.

La tercera variante corresponde a la programación por metas MINIMAX denominada también programación por metas Chebysev.

Esta variante busca la minimización de la máxima desviación de entre todas las posibles desviaciones. La estructura algebraica de un modelo de programación por metas MINIMAX es la siguiente:

$$\begin{array}{l}
 \text{Min } D \\
 \text{sujeto a:} \\
 \alpha_i n_i + \beta_i p_i \leq D \\
 f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \\
 \mathbf{x} \in F \\
 \mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{n} \geq 0 \quad \mathbf{P} \geq 0
 \end{array} \quad \dots(28)$$

donde D representa la máxima desviación. Desde un punto de vista computacional, un modelo de metas MINIMAX es un programa lineal que puede resolverse por aplicación directa del Simplex. Resulta obvio intuir la existencia de una cierta relación entre el enfoque metas MINIMAX que acabamos de exponer y la programación compromiso para la métrica $\pi = \infty$.

Algunos comentarios críticos

Parece razonable que una vez discutida tanto la naturaleza como el funcionamiento de los principales métodos multicriterio nos planteemos la evaluación comparativa de las ventajas e inconvenientes que presentan dichos métodos. En pocas palabras, cabe preguntarse cuál es el método multicriterio más adecuado. La respuesta, como veremos a continuación, no es sencilla, pues cada método multicriterio conlleva una serie de ventajas e inconvenientes.

La razón de esta dificultad debe fundamentalmente a la carencia de estos métodos de una base axiomática sólida. Dicho con otras palabras, los métodos multicriterio discretos no satisfacen un sistema axiomático consistente y atractivo. Esta falta de base axiomática hace que las clasificaciones de alternativas proporcionadas por diferentes métodos resulten cuestionables, cuando no arbitrarias.

Por otra parte, algunos de estos métodos demandan un tipo de información que en muchas ocasiones resulta muy difícil de obtener.

Así, por ejemplo, para la aplicación del ELECTRE hace falta conocer entre otras cosas, los umbrales de concordancia y de discordancia.

Indudablemente, la fijación de estos parámetros conlleva una fuerte carga arbitraria, lo que reduce considerablemente la fiabilidad de los resultados obtenidos con estos métodos.

Diversos autores han apuntado con razón, que en numerosas aplicaciones del ELECTRE para los valores fijados inicialmente a los umbrales de concordancia y discordancia el correspondiente núcleo está vacío o está formado por todas las alternativas iniciales. Por lo que se van graduando los anteriores umbrales hasta obtener un núcleo con el tamaño deseado.

Por tanto, la determinación del tamaño final del núcleo es en buena medida arbitraria. Además, a la filosofía del ELECTRE parece subyacer el supuesto de existencia de una función de utilidad lineal y aditiva. La compatibilidad que normalmente existe entre el núcleo del problema ELECTRE y la ordenación obtenida por un modelo compromiso para la métrica $\pi = 1$ parece corroborar esta conjetura. Como Arrow & Raynaud [25, p. 134] indican: «si se poseen los elementos necesarios para construir una función de

utilidad lineal, ¿cuál sería el motivo para ensayar un método tan sofisticado como es ELECTRE?»

Estas observaciones no pretenden minar la aplicabilidad de los métodos multicriterio discretos. Tal vez este tipo de problemas, de indudable interés práctico muy especialmente en el campo de la ingeniería de sistemas, no han podido resolverse con la debida precisión, debido a su compleja naturaleza.

Los métodos multicriterio discretos desarrollados hasta ahora –el ELECTRE y el AHP son ejemplos representativos– pueden considerarse ideas ingeniosas con un gran atractivo, pero que al no estar integradas en un esquema axiomático global pierden algo de solidez. Dicho con otras palabras, estos métodos hay que considerarlos como procedimientos heurísticos que permiten en la generalidad de los casos obtener resultados razonables de problemas decisionales multicriterio de gran complejidad e importancia.

La programación por metas al combinar la lógica tradicional de la optimización con el deseo de los centros decisores de satisfacer diferentes metas se convierte en un instrumento analítico de gran potencialidad en el campo del análisis decisional. Pese a su fertilidad, flexibilidad e indudable éxito operativo el enfoque no está exento de dificultades. Así, en los últimos años, diferentes autores han apuntado posibles debilidades en los modelos de programación por metas.

Sin embargo, puede apuntarse que los problemas asociados a la programación por metas no son inherentes a la lógica que subyace a este enfoque, sino que se deben a un uso no satisfactorio del mismo.

Es decir, muchos de los inconvenientes apuntados en la literatura sobre la programación por metas se deben a un uso mecanicista del enfoque, que no tiene en cuenta un conocimiento preciso de los supuestos subyacentes.

Estas consideraciones conducen a la idea de temas críticos en programación por metas, entendiendo como tal anomalías aparentemente causadas por debilidades lógicas de la programación por metas, pero que en realidad se deben a un uso insatisfactorio del enfoque. Un posible listado de este tipo de anomalías o temas críticos en programación por metas es el siguiente: a) La solución generada por un modelo

basado en metas puede ser ineficiente desde un punto de vista Paretiano. Esto obliga a comprobar la eficiencia de la solución y a utilizar algún procedimiento para restaurarla en caso de ineficiencia²¹.

b) La posible equivalencia de soluciones entre los modelos de programación por metas y los modelos tradicionales basados en la optimización de un sólo criterio.

c) La falta de significado y las conclusiones equivocadas a las que se puede llegar cuando la función de logro de un modelo basado en metas lexicográficas se formula erróneamente como un escalar en vez de como un vector.

d) Los problemas que pueden surgir cuando se omite una variable de desviación en la formulación de una meta.

e) Los problemas que pueden surgir cuando innecesariamente se formulan metas con dos lados (esto es, se consideran automáticamente como variables de desviación no deseadas tanto la desviación positiva como la negativa).

f) Una excesiva priorización de las metas en un modelo lexicográfico puede generar metas redundantes; esto es, metas que no jueguen ningún papel en el correspondiente proceso de optimización lexicográfico.

Desde el punto de vista de carga computacional, la programación por metas es el enfoque más potente, pues su aplicación requiere una sola «pasada de computador». Por el contrario, en el contexto de la programación multiobjetivo, cuando se aproxima el conjunto eficiente por medio del método de las restricciones o de las ponderaciones, el número de «pasadas de computador» es una función casi exponencial del número de objetivos implicados. En el caso de la programación compromiso, en rigor sólo hace falta resolver dos programas matemáticos (uno para la métrica $\pi = 1$ y otro para la métrica $\pi = \infty$) para obtener los límites del conjunto compromiso. Ahora bien, actuando de esta forma, ignoramos el resto del conjunto eficiente, lo que puede significar una pérdida importante de información.

Si realizamos la evaluación en base a la cantidad y precisión de la información que demandamos del centro decisor para poder implementar el correspondiente método multicriterio, entonces la programación por metas resulta el método menos atractivo. Así, dentro de este enfoque, el centro decisor tiene que proporcionar una información

muy precisa sobre niveles de aspiración, pesos a asociar a las variables de desviación, ordenaciones lexicográficas de preferencias, etc. En este aspecto, la programación multiobjetivo se encuentra en el polo opuesto de la escala, pues para construir un modelo multiobjetivo no hace falta ningún tipo de información acerca de las preferencias del centro decisor. En el caso de la programación compromiso, sólo necesitamos información sobre los pesos asociados a las discrepancias entre objetivo y valores ideales para, de esta manera, poder determinar el conjunto compromiso.

Finalmente, si realizamos la evaluación en base a la cantidad de información producida por el modelo, los enfoques basados en metas -al proporcionar una única solución- se encuentran en una situación de inferioridad con respecto a los otros dos enfoques.

Aunque los análisis de sensibilidad pueden paliar el problema, la programación por metas proporciona una cantidad de información mucho más escasa que la programación multiobjetivo o la programación compromiso.

Este tipo de consideraciones no nos permiten establecer de una manera definitiva, la superioridad teórica y operativa de un método multicriterio con respecto a otros. Puede concluirse de una manera pragmática, indicando que en la elección del método multicriterio más adecuado influya de una manera decisiva las características situacionales del problema decisional en concreto.

La influencia del contexto situacional en la elección del método multicriterio más adecuado es especialmente relevante en el campo de la ingeniería de sistemas computacionales. En efecto, en este dominio coexisten problemas con niveles de complejidad analítica muy diferentes. Así, podemos encontrarnos con un problema de diseño de un sistema de transmisión de datos en el que se hace necesario considerar varios criterios (coste, tiempo de respuesta, disponibilidad de datos, etc), además de un elevadísimo número de variables de decisión de tipo binario (p.ej. varios miles de variables 0/1). Tal tipo de problema sólo puede abordarse de una manera efectiva, recurriendo a la programación por metas²².

Frente a este ejemplo de naturaleza compleja, existen otros problemas sistémicos formalmente más sencillos. Por ejemplo, consideremos el caso consistente en ordenar un número finito de sistemas factibles en base a varios criterios. Para resolver una

problema de esta naturaleza basta recurrir a un sencillo método discreto como el ELECTRE.

En definitiva, puede decirse que en general y muy especialmente en el campo de la ingeniería de sistemas computacionales, no existe una superioridad de unos métodos con respecto a otros. El estudio cuidadoso de la naturaleza del problema a analizar nos conducirá a la elección del método multicriterio más adecuado.

Finalmente, puede ser interesante apuntar que, por razones expositivas, los diferentes métodos multicriterio se han presentado de una manera desconectada. Sin embargo, entre los diferentes métodos expuestos existen relaciones y conexiones importantes. Así, tal como se expuso en la programación por metas MINIMAX y la programación compromiso para la métrica $\pi = \infty$ son análogas. Dichos enfoques se vuelven no sólo análogos sino equivalentes cuando los niveles de aspiración del modelo de metas MINIMAX se fijan en sus valores anclas. Una equivalencia semejante existe entre la programación por metas ponderadas y la programación compromiso para la métrica $\pi = 1$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abu-Taleb, M.F. y Mareschal, B. WATER RESORCES PLANNING IN THE MIDDLE EAST: APPLICATION OF THE PROMETHEE V MULTICRITERIA METHOD, http://smg.ulb.ac.be/Preprints/Abu_Taleb94_09.html
2. Brans, J.P. y Mareschal, B. HOW TO DECIDE WITH PROMETHEE. <http://smg.ulb.ac.be>
3. Buchanan, John; Shepard, Phillip y Vanderpooten, Daniel. PROJECT RANKING USING ELECTRE III. Working paper. January 1999. <http://www.waikato.ac.nz/depts/mns...h/Abstract/Paper/RRS-99-1-BuchSheVan.htm>
4. Buffa, Elwood S. y Dyer, James S. CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN E INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. México, Noriega-Limusa, 1994. 852 pp.
5. Flament, Michael. GLOSARIO MULTICRITERIO. Publicaciones de los miembros de la R.E.D.-M <http://www.unesco.org.uy/rem-m/publicac.htm>

6. French, Simon. DECISION THEORY AN INTRODUCTION TO THE MATHEMATICS OF RATIONALITY. England, Ellis Horwood Limited, 1988.
7. Hogarth, R. JUDGEMENT AND CHOICE. 2nd. Ed., 1991. John Wiley and Sons. p. 80
8. Mauchant, T. PROMETHEE AND GAIA IN A MULTI-DECISION MAKER ENVIROMENT. http://smg.ulb.ac.be/Preprints/Marchant96_01.html
9. Oddershede H., Astrid y Arias M., Arnoldo. APLICACIÓN DEL MÉTODO JERÁRQUICO ANALÍTICO PARA LA TOMA DE DECISIONES EN PROBLEMAS DE DESARROLLO ORGANIZACIONAL: CASO DE UN DEPARTAMENTO ACADÉMICO.1991. <http://lauca.usach.cl/red-m97.htm/RES-13.HTM>
10. Prawda Witenberg, Juan. MÉTODOS Y MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. Vol. 2. Modelos Estocásticos, México, Noriega-Limusa, 1995.1027 pp.
11. Primary Care Institute. THE ANALYTIC HIERARCHY PROCESS. Highland Hospital, Rochester, NY, USA. 1997
<http://www.miner.rochester.edu/smd/pci/AHP:html>
12. Romero, Carlos. ANÁLISIS DE LAS DECISIONES MULTICRITERIO. España, ISDEFE, 1996.115 pp. Consultado el 25 de febrero de 2003.
<http://www.isdefe.es/webisdefe.nsf/Menu/E603AD0674FB4BBDC1256BB5003D3066?OpenDocument>
13. Vincke, Philipe. Cap. 11 OUTRANKING APPROACH. <http://smg.ulb.ac.be>

NOTAS

- 1 Stillwell, W.G., D.A. Seaver, y W. Edwards, A Comparison of Weight Approximation Techniques in Multiatribute Utility Decision Making Organization Behavior and Human Performance, 28: 62-77, 1981.
- 2 El punto de partida de los procesos analíticos jerarquizados es el artículo de Saaty, T.L., A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, Journal of Mathematical Psychology, 15: 234-281, 1977. Una buena presentación desde un punto de vista pedagógico de esta metodología puede verse en los siguientes dos trabajos de Saaty: The Analytic Hierarchy Process, MacGraw Hill, Nueva York, 1980 y How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process, Interfaces 24: 19-43, 1994.
- 3 <http://www-mmd.eng.cam.ac.uk/people/ahr/dstools/choosing/ahp.htm>
- 4 <http://mis.ucd.ie/students/mms1/ahp.html>
- 5 <http://www.rsginc.com/ahp/index.htm>
- 6 <http://www-mmd.eng.cam.ac.uk/people/ahr/dstools/choosing/ahp.htm>
- 7 <http://argenet.com.ar/~von/H/apj.htm>
- 8 <http://mis.ucd.ie/students/mms1/ahp.html>
- 9 <http://www.rsginc.com/ahp/index.htm>
- 10 Una exposición accesible del Simplex Multicriterio puede verse en los Capítulos 7, 8, y 9 del libro de Steuer, R.E., Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application, Krieger Publishing Company, Malabar, 1989.
- 11 El punto de partida de la programación compromiso son los siguientes dos trabajos: Yu, P.L. A Class of Solutions for Group Decision Problems, Management Science 19: 688-693, 1973 y Zeleny, M., Multiple Criteria Decision Making (Cochrane, J.L., Zeleny, M., editores), University of South Carolina Press, Columbia: 262- 301, 1973.
- 12 Zeleny, M., A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal, Computers and Operations Research 1: 479-496, 1974.
- 13 Freimer, M., y P.L. Yu, Some New Results on Compromise Solutions for Group Decision Problems, Management Science 22: 688-693, 1976
- 14 En este sentido pueden consultarse los siguientes trabajos: Ballestero, E., y C. Romero, A Theorem Connecting Utility Function Optimization and Compromise Programming, Operations Research Letters 10: 421-427, 1991 y Ballestero, E., Romero, C., Utility Optimization when the Utility Function is Virtually Unknown, Theory and Decision 37: 233-243, 1994.
- 15 Los trabajos pioneros de Simon, H.A. sobre la lógica satisfaciente son: A Behavioral Model of Rational Choice, Quarterly Journal of Economics 69: 99-118, 1955 y Models of Man, John Wiley and Sons, Nueva York, 1957.
- 16 Charnes, A., W.W. Cooper y R. Ferguson, Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming, Management Science 1: 138-151, 1955. El concepto Goal Programming aparece por primera vez de forma explícita en el apéndice B del libro clásico de Charnes, A. y W.W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming., John Wiley and Sons, Nueva York, 1961.
- 17 Lee, S.M., Goal Programming for Decision Analysis, Auerbach Publishers, Filadelfia, 1972.
- 18 Ignizio, J.P., Goal Programming and Extensions, Lexington Books, Massachusetts, 1976.
- 19 En un reciente trabajo de Schniederjans, M.J., Goal Programming: Methodology and Applications. Kluwer, Boston, 1995, se referencian más de 900 trabajos teóricos y aplicados en los que se recurre a este tipo de enfoque multicriterio.
- 20 Ignizio, J.P. y J.H. Perlis, Sequential Linear Goal Programming, Computers and Operations Research 6: 141-145, 1979.
- 21 Un buen tratamiento de los métodos de detección de soluciones ineficientes, así como de la restauración de la eficiencia en un contexto de programación por metas, puede verse en el trabajo de Tamiz, M. y D. Jones, Goal Programming and Pareto Efficiency, Journal of Information and Optimization Sciences 17: 1-17, 1996.
- 22 Una aplicación de la programación por metas al diseño de sistemas de transmisión de datos puede verse en el trabajo de Lee, H., Y. Shi y J. Stolen, Allocating Data Files Over a Wide Area Network: Goal Setting and Compromise Design, Information and Management 26: 85-93, 1994.