CAPÍTULO 2. MODELOS PROBABILÍSTICOS.

2.1 Introducción a la teoría de la probabilidad

Laplace, eminente matemático francés de la última mitad del siglo XVIII y principios del XIX, describía la teoría de la probabilidad como “el sentido común reducido al cálculo”. Veamos como la siguiente anécdota justifica esta descripción.

Dos estudiantes de Instituto intentan ponerse de acuerdo en como pasar una tarde. Acuerdan que tomarán su decisión lanzando una moneda. Si sale cara irán al cine, si sale cruz saldrán a tomar una coca-cola y si la moneda cae de canto, estudiarán.

La historia no es tan trivial como pueda parecer, con ella podemos aprender mucho. El sentido común, basando su juicio en la experiencia, nos indica que los estudiantes quieren saltarse la necesidad de estudiar. En otras palabras sabemos intuitivamente que la moneda no caerá de canto, que lo hará sobre la cara o sobre la cruz. Más aún, si la moneda es legal, tenemos la certeza moral de que las posibilidades de que salga cara o cruz son las mismas.

Pues bien la teoría de la probabilidad se basa en la asunción que hacemos de cuestiones tales como estas : ¿Cuál es la probabilidad de que una moneda caiga sobre el borde? ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara? ¿Cuál es la probabilidad de que salga cruz?

Para poder tratar estas cuestiones desde un punto de vista matemático, es necesario asignar valores numéricos a cada una de la probabilidades involucradas.

Supongamos por el momento que denotamos por ***p*** el valor numérico de la probabilidad de que al lanzar una moneda, salga cara. Puesto que es ***igualmente posible*** que al lanzar la moneda, salga cruz, la probabilidad de que salga cruz también debe tener asignado el valor ***p***.

Como tenemos la ***certeza*** de que saldrá cara o cruz sigue que ***2p*** debe ser el valor asignado al suceso seguro, el que ocurrirá siempre que lancemos una moneda al aire. Podemos elegir cualquier valor que nos plazca para el suceso seguro. Es costumbre elegir el valor 1. Esto es: asumimos que ***2p=1***. Entonces la probabilidad de que la moneda muestre cara es : ***1/2*** ; la probabilidad de que muestre cruz es : ***1/2***; y la probabilidad de que salga cara o cruz es:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Si analizamos detalladamente el ejemplo, podemos apreciar :

Un experimento aleatorio, lanzar una moneda al aire

Unos resultados puntuales, sale cara o sale cruz y no podemos tener la certeza de antemano de que sea cara o sea cruz.

Unas asignaciones de probabilidad a cada uno de los resultados, que se basan en el sentido común y en nuestra experiencia previa.

Vamos a definir de manera más precisa cada uno de los elementos que intervienen:

Experimento aleatorio

Es el experimento que se caracteriza porque su desarrollo no es previsible con certidumbre.

Espacio muestral

Asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener al realizar el experimento. Lo designamos con la letra ***E*** y colocamos sus elementos entre llaves y separados por comas.

Suceso

De un experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral ***E***. Los designamos por letras mayúsculas: ***A,B,C,...,*** ponemos sus elementos entre llaves y separados por comas.

Observación :

Un resultado concreto de un experimento es un elemento del espacio muestral asociado al experimento, conceptualmente suceso y resultado son dos cosas distintas. Los resultados de un experimento aleatorio se suelen representar con letras minúsculas, los sucesos con letras mayúsculas.

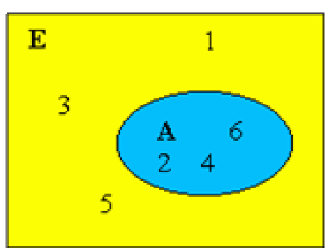
Ejemplo. lanzamos un dado con sus caras numeradas del uno al seis.

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Sea el suceso A «salir par»

$$A = \{2,4,6\}$$

Gráficamente:



En el ejemplo anterior, el suceso ***A*** ocurre siempre que el resultado del experimento sea el elemento ***2***, el elemento ***4*** o el elemento ***6***.

La confusión entre suceso y resultado se debe a que cuando el suceso es : " que al lanzar un dado salga 2" y el resultado :"sale un dos al lanzar el dado", sólo ocurre el suceso cuando el resultado es 2.

Suceso : "Sale un dos" es el subconjunto ***{2}*** del espacio muestral

Resultado : "Sale un dos" es el elemento ***2*** del espacio muestral

Funciones de distribución

El paso siguiente es asignar (distribuir) probabilidades. Las definiciones que siguen están motivadas por el ejemplo del lanzamiento de una moneda, recordamos que en ese ejemplo a cada resultado del espacio muestral le asignabamos un número no negativo tal que la suma de todos los números asignados a cada resultado deberá ser 1.

Definición

Sea ***X*** una variable que representa a los posibles resultados de un experimento aleatorio, en principio vamos a asumir que este experimento tiene sólo un número finito de posibles resultados. Sea ***E***, el espacio muestral del experimento. Una ***función de distribución*** para ***X*** es una función real ***f*** cuyo dominio es ***E*** y que satisface:

1. $f(\omega) \geq 0, \quad para\, todo\ \omega \in E,\ y$
2. $\sum f(\omega) = 1$

Para cualquier subconjunto A de $\boldsymbol{E}$, se define la ***probabilidad*** de A como el número $\boldsymbol{P(A)}$ dado por :

$$\boldsymbol{P(A)} = \sum_{\omega \in A} f(\omega)$$

Ejemplo:

Sean tres equipos de futbol, ***a, b*** y ***c*** que se presentan a un torneo de verano, sólo uno ganará el torneo. El espacio muestral es el conjunto de tres elementos, ***E={a,b,c}***, donde cada elemento corresponde al triunfo de cada uno de los equipos. Suponemos que ***a*** y ***b*** tienen las mismas posibilidades de ganar y ***c*** tiene solamente la mitad de las posibilidades de ganar que ***a***. Debemos asignar probabilidades de modo que :

$$f(a) = f(b) = 2f(c)$$

Como se debe de cumplir :

$$f(a) + f(b) + f(c) = 1$$

Sigue que :

$$2f(c) + 2f(c) + f(c) = 1$$

Y por tanto :

$$f(a) = \frac{2}{5} \quad ; \quad f(b) = \frac{2}{5} \quad ; \quad f(c) = \frac{1}{5}$$

Sea el suceso ***A***, "gana el trofeo el equipo ***a***" ; el suceso ***B***, "gana el trofeo el equipo ***b***" y el suceso ***C***, "gana el trofeo el equipo ***c***". En el lenguaje de la teoría de conjuntos:

$$A = \{a\} \quad ; \quad B = \{b\} \quad ; \quad C = \{c\}$$

Y

$$p(A) = \frac{2}{5} \quad ; \quad p(B) = \frac{2}{5} \quad ; \quad p(C) = \frac{1}{5}$$

Y si el suceso ***F*** es : "gana ***a*** o gana ***c***", que en teoría de conjuntos es :

$$F = \{a, c\}$$

será:

$$p(F) = f(a) + f(c) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

En este último caso se puede apreciar como un suceso se puede describir en términos de otros sucesos utilizando las construcciones standard de la teoría de conjuntos.

Las representaciones gráficas de las construcciones de la teoría de conjuntos se llaman diagramas de Venn. En ocasiones es muy conveniente para resolver un problema de probabilidad hacer la representación gráfica del espacio muestral y de los sucesos (subconjuntos del espacio muestral) que intervienen en el problema.

$$P(A) = \frac{Casos\ \ favorables\ a\ A}{Casos\ \ posibles}$$

$$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A \cap R) + P(B \cap R)} = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B)}$$

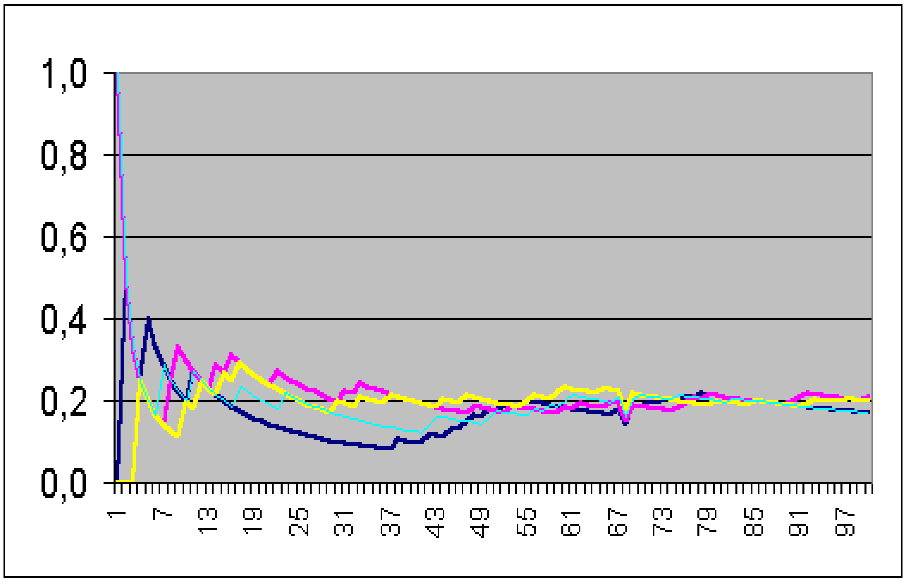
2.2 PROBABILIDAD

Idea intuitiva

Número, entre 0 y 1, asociado con la verosimilitud de que ocurra un suceso, 0 cuando estamos seguros que el suceso no va a ocurrir y 1 cuando estamos seguros que sí va a ocurrir. El problema es ¿cómo asignar ese número en situaciones de incertidumbre?

a) A veces se *estima* por la frecuencia relativa. P.e. una manera de aproximarnos a la probabilidad de que una intervención quirúrgica arriesgada tenga éxito es consultar el registro de las intervenciones quirúrgicas realizadas sobre pacientes similares, si de las últimas 10, ha sido un éxito en 8, la frecuencia relativa es 8/10=0,8 se parecerá a esa probabilidad.

La frecuencia relativa cambia, en el ejemplo anterior si el registro, en lugar de 10 pacientes, tuviera 11, la frecuencia relativa sería necesariamente distinta (8/11 ó 9/11), pero hay una ley empírica que establece que cuando el "número de ensayos" (pacientes, en el ejemplo) es suficientemente grande, la frecuencia relativa se estabiliza. A veces, se define la probabilidad como el límite de la frecuencia relativa. ¿Cómo saber, en cada caso, si el "número de ensayos" es suficientemente grande? Una parte de la estadística tiene que ver con este problema.



La gráfica muestra la evolución de la frecuencia relativa del resultado "cara 1" en 4 series de 100 tiradas de un dado.

Se observa que la frecuencia relativa oscila, que la amplitud de las oscilaciones va decreciendo a medida que aumenta el número de tiradas y que todas las series tienden a estabilizarse a la misma altura, también que 100 no es un número "suficientemente grande" para que la frecuencia relativa ya esté estabilizada (los valores finales de las 4 series varían entre 0,17 y 0,21).

b) Hay situaciones en que se puede *calcular*: si todos los resultados del experimento son igualmente probables, entonces la probabilidad se define (*definición clásica* o de Laplace) como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos totales.

$$p(S) = \frac{CF}{CT}$$

La probabilidad de que el resultado de tirar un dado sea un uno, se calcularía de esta forma. Compárese el resultado 1/6 obtenido así con la gráfica anterior.

2.3 Formalización de la probabilidad

Experimento Aleatorio: experimento que puede ser repetido bajo "las mismas condiciones", del que puede establecerse el conjunto de sus posibles resultados, pero no predecir un resultado concreto.

Espacio muestral: conjunto de posibles resultados.

Punto muestral: elemento del espacio muestral.

Suceso: cualquier subconjunto del espacio muestral.

Si representamos el espacio muestral por Ω y a los sucesos por A: $A \subset \Omega$. Dado que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto ($\emptyset \subset \Omega$) y que todo conjunto es subconjunto de sí mismo ($\Omega \subset \Omega$), tanto el conjunto vacío como el espacio muestral son sucesos.

Si lo necesita Repaso del álgebra de conjuntos

Un problema a tener en cuenta es **que dado un experimento, podemos encontrar más de un espacio muestral.**

Ejemplo 1: una mujer portadora de hemofilia tiene 3 hijos ¿Cuál es el espacio muestral apropiado para estudiar la posible hemofilia de estos?

Opción a: Cada hijo puede padecer hemofilia (s) o no (n), por tanto

Ω_1={sss, ssn, sns, nss, snn, nsn, nns, nnn}

Donde, por ejemplo, 'sns' significa el primero y el tercero la padecen y el segundo no. Hay que asegurarse que no se olvida ninguno.

En este espacio muestral, el suceso "dos hijos padecen hemofilia" se representa como A_1={ssn, sns, nss} y el suceso "los dos primeros no la padecen" como A_2={nns, nnn}

Opción b: Pueden padecer hemofilia los tres hijos (3), dos (2), ...

Ω_2={3, 2, 1, 0}

En este espacio muestral, el suceso "dos hijos padecen hemofilia" es A_1={2} y el suceso "los dos primeros no la padecen" no se puede representar porque en el espacio muestral no está contemplado el orden.

Definición axiomática de probabilidad

Sea Ω: espacio muestral, $P(\Omega)$ conjunto de las partes de Ω o conjunto de sucesos, o álgebra de sucesos. Se define probabilidad, o función de probabilidad, a cualquier función $p: P(\Omega) \to \mathbb{R}$ (es decir, una regla bien definida por la que se asigna a cada suceso un, y un solo un, número real) que cumpla los axiomas siguientes

i) $p(A) \geq 0 \quad \forall A \in P(\Omega)$

ii) $p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \ldots$

si Ai □ Aj = □ i □ j (sucesos mutuamente excluyentes)

iii) p(□) = 1

A la estructura (□, P(□), p) se le denomina *espacio de probabilidad*.

Establecer claramente el espacio de probabilidad será el primer paso imprescindible para estudiar una experiencia aleatoria. Muchas de las dificultades que surgen, en la práctica, en el análisis estadístico de investigaciones clínicas tienen que ver con el establecimiento implícito y defectuoso de este espacio.

Obsérvese que es necesario asignar un número a todos los sucesos, no sólo a los sucesos elementales, pero si se ha asignado la probabilidad a los sucesos elementales, a través de la propiedad ii) se puede asignar a todos los demás.

Ejemplo 1:

Para el experimento aleatorio de tirar un dado, el espacio muestral es □= {1, 2, 3, 4, 5, 6}. En este espacio el conjunto de sucesos es P(□) = {□, {1}, {2}, ...{1,2}, {1,3}, ...{1,2,3,4,5,6}}.Para establecer una probabilidad hay que asignar un número a todos esos sucesos.

Sin embargo si se ha asignado a los sucesos elementales p({1})= p({2})= ...= p({6})= 1/6, por la propiedad ii), p.e. la probabilidad del suceso {1, 3} es p({1,3})= p({1})+ p({3})=2/6.

Nota: El suceso {1} es: "el resultado de tirar el dado es la cara 1", el suceso {1, 3} es: "el resultado de tirar el dado es la cara 1, o la 3", el suceso {1, 3, 5} es: "el resultado de tirar el dado es una cara impar".

Propiedades de la probabilidad

Demostraciones

1) $p(A^c) = 1 - p(A)$ A^c representa el suceso *complementario* de A, es decir el formado por todos los resultados que no están en A.

2) A_1 □ A_2 □ $p(A_1)$ □$p(A_2)$

3) p(□) = 0

4) p(A) □ 1

5) p(A □ B) = p(A) + p(B) - p(A □ B) (*Regla general de la adicción*)

Ejemplo 2: Un 15% de los pacientes atendidos en un hospital son hipertensos, un 10% son obesos y un 3% son hipertensos y obesos. ¿Qué probabilidad hay de que elegido un paciente al azar sea obeso o hipertenso?

A = {obeso} B = {hipertenso}

$A \cap B$ = {hipertenso y obeso}

$A \cup B$ = {obeso o hipertenso}

$p(A) = 0{,}10$; $p(B) = 0{,}15$; $p(A \cap B) = 0{,}03$

$p(A \cup B) = 0{,}10 + 0{,}15 - 0{,}03 = 0{,}22$

2.4 Probabilidad condicionada

Como la probabilidad está ligada a nuestra ignorancia sobre los resultados de la experiencia, el hecho de que ocurra un suceso, puede cambiar la probabilidad de los demás. El proceso de realizar la historia clínica, explorar y realizar pruebas complementarias ilustra este principio. La probabilidad de que ocurra el suceso A si ha ocurrido el suceso B se denomina *probabilidad condicionada* y se define

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{si } p(B) \neq 0$$

Esta definición es consistente, es decir cumple los axiomas de probabilidad. Cuando ocurre un suceso cambia el espacio muestral, por eso cambia la probabilidad. A veces es más fácil calcular la probabilidad condicionada teniendo en cuenta este cambio de espacio muestral.

Ejemplo 3: Una mujer es portadora de la enfermedad de Duchenne ¿Cuál es la probabilidad de que su próximo hijo tenga la enfermedad?

Según las leyes de Mendel, todos los posibles genotipos de un hijo de una madre portadora (xX) y un padre normal (XY) son xX, xY, XX, XY y tienen la misma probabilidad. El espacio muestral es Ω = {xX, xY, XX, XY} el suceso A={hijo enfermo} corresponde al genotipo xY, por tanto, según la definición clásica de probabilidad $p(A) = 1/4 = 0{,}25$

La mujer tiene el hijo y es varón ¿qué probabilidad hay de que tenga la enfermedad?

Se define el suceso B = {ser varón} = {xY, XY} la probabilidad pedida es $p(A|B)$ y aplicando la definición anterior $p(B) = 0{,}5$; $A \cap B$ = {xY}; $p(A \cap B) = 0{,}25$; $p(A|B) = 0{,}25/0{,}5 = 0{,}5$

Si sabemos que es varón, el espacio muestral ha cambiado, ahora es B. Por lo tanto se puede calcular $p(A|B)$ aplicando la definición clásica de probabilidad al nuevo espacio muestral $p(A|B) = 1/2 = 0,5$

Ejemplo 4: Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?

A = {ser hipertenso} B = {ser fumador} $A \cap B$ = {ser hipertenso y fumador} $p(A|B) = 0,10/0,50 = 0,20$

Obsérvese que los coeficientes falso-positivo y falso-negativo de las pruebas diagnósticas son probabilidades condicionadas.

La fórmula anterior se puede poner $p(A \cap B) = p(B)\, p(A|B) = p(A)\, p(B|A)$ llamada *regla de la multiplicación,* que se puede generalizar a más sucesos $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = p(A_1 \cap A_2)\, p(A_3|A_1 \cap A_2) = p(A_1)\, p(A_2|A_1)\, p(A_3|A_1 \cap A_2)$

En general $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots) = p(A_1)\, p(A_2|A_1)\, p(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots$ llamado *principio de las probabilidades compuestas* y especialmente útil para aquellas situaciones en que las probabilidades condicionadas son más fáciles de obtener que las probabilidades de las intersecciones.

Ejemplo 4: Se sabe por estudios previos que el 0,1% de la población tiene problemas vasculares. Un estudio sobre individuos con problemas vasculares revela que el 20% de ellos son placas de ateroma. Si el 10% de los individuos con placas de ateroma están expuestos a muerte súbita por desprendimiento de trombos ¿qué probabilidad tiene un individuo cualquiera de estar expuesto a muerte súbita por desprendimiento de trombos de una placa de ateroma?

A_1 = {problemas vasculares}; A_2 = {placas de ateroma}; A_3 = {expuesto a muerte súbita por ....} $p(A_1) = 0,001$; $p(A_2|A_1) = 0,20$; $p(A_3|A_1 \cap A_2) = 0,1$ $p(A1 \cap A2 \cap A3) = 0,001 \times 0,20 \times 0,1 = 0,000002$

Ejemplo 5: Una urna contiene 10 bolas, de las cuales 3 son rojas, 5 verdes y 2 azules. Se extraen al azar 3 bolas. Calcular la probabilidad de que la primera sea azul, y las otras dos verdes.

Definimos A_1 = {la 1ª bola es azul}; A_2 = {la 2ª bola es verde}; A_3 = {la 3ª bola es verde} $p(A_1) = 2/10$ aplicando la definición clásica de probabilidad, puesto que hay 10 bolas y 2 son verdes. $p(A_2|A_1) = 5/9$; si la primera bola extraída es azul, en la urna quedan 9 bolas, 5 de ellas verdes. $p(A_3|A_1 \cap A_2) = 4/8$; si la primera bola extraída es azul y la segunda verde en la urna quedan 8 bolas, 4 de ellas verdes. $p(A1 \cap A2 \cap A3) = 2/10 \times 5/9 \times 4/8 = 1/18$

Sucesos independientes

Dos sucesos son independientes si y sólo si $p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$. Si dos sucesos son independientes

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(B)} = p(A)$$

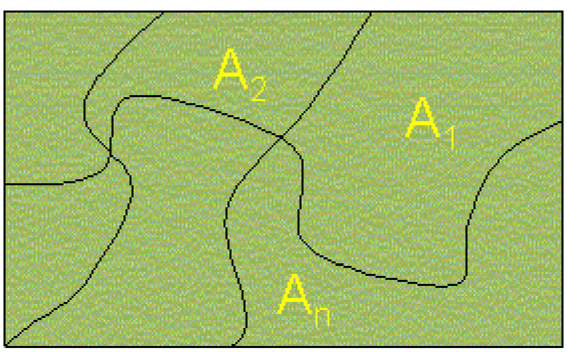
y del mismo modo $p(B|A) = p(B)$ Esta propiedad coincide más con la idea intuitiva de independencia y algunos textos la dan como definición. Hay que notar, sin embargo, que ambas definiciones no son estrictamente equivalentes.

Ejemplo 6: Para un hijo de una mujer portadora de Duchenne, el sexo y la enfermedad ¿son independientes?

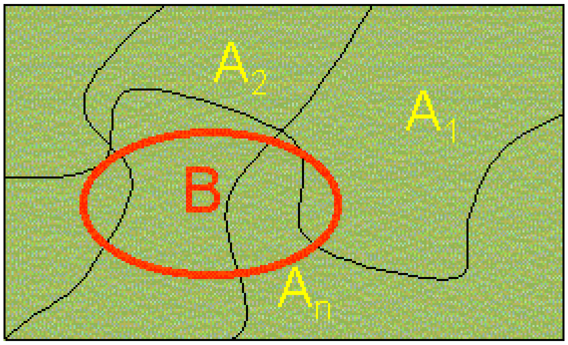
Según vimos en el Ejemplo 3 el espacio muestral es Ω = {xX, xY, XX, XY}
Definimos los sucesos A = {varón} = {xY, XY}; B = {enfermo} = {xY} $A \cap B$ = {xY}
por lo tanto $p(A) = 0{,}5$; $p(B) = 0{,}25$; $p(A \cap B) = 0{,}25 \neq p(A)\, p(B)$ NO son independientes.

Regla de la probabilidad total

Se llama *partición* a conjunto de sucesos A_i tales que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j$ es decir un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y que cubren todo el espacio muestral



Regla de la probabilidad total: Si un conjunto de sucesos A_i forman una partición del espacio muestral y $p(A_i) \neq 0 \ \forall\, A_i$, para cualquier otro suceso B se cumple



$$p(B) = p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2) + \ldots + p(B|A_n)p(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(B|A_i)p(A_i)$$

Ejemplo 7: La prevalencia de infarto cardíaco para hipertensos es del 0,3% y para no hipertensos del 0,1%. Si la prevalencia de hipertensión en una cierta población es del 25% ¿Cuál es la prevalencia del infarto en esa población?

A_1 = {ser hipertenso} A_2 = {no serlo} estos sucesos constituyen una partición B = {padecer infarto} datos: $p(B|A_1) = 0{,}003$; $p(B|A_2) = 0{,}001$; $p(A_1) = 0{,}25$

evidentemente $p(A_2) = 0{,}75$ por la propiedad 1 $p(B) = 0{,}003 \times 0{,}25 + 0{,}001 \times 0{,}75 = 0{,}0015$

2. 5 Teorema de Bayes

Si los sucesos A_i son una partición y B un suceso tal que $p(B) \neq 0$

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j)p(A_j)} \quad \text{para } i = 1,\ldots n$$

Demostración

Aplicaciones

Diagnóstico médico (en general clasificaciones no biunívocas): El diagnóstico consiste en establecer la enfermedad de un paciente, a partir de una serie de síntomas. Pero los síntomas y las enfermedades no están ligados de un modo biunívoco.

Llamemos E_i al conjunto de enfermedades E_1: tuberculosis pulmonar; E_2 :cáncer de pulmón; E_3: bronquitis obstructiva; etc. y S_i a los síntomas y síndromes asociados con las mismas S_1: tos; S_2: estado febril; S_3: hemotisis; etc. La información accesible en los libros de patología, o en un archivo de historias clínicas es del tipo Para E_1: algunos (digamos el 20%) tienen hemotisis; muchos (80%) tienen tos; etc. y lo mismo para las demás enfermedades

En términos de probabilidad condicionada, esta información es $p(S_3|E_1) = 0{,}2$; $p(S_1|E_1) = 0{,}8$ etc. para diagnosticar la tuberculosis se ha de evaluar, para los síntomas que presenta el paciente $p(E_1|S_i)$ para lo que se puede usar el teorema de Bayes si las enfermedades forman una partición (son mutuamente excluyentes y se consideran **todas** las enfermedades compatibles con el síntoma) y se conocen sus prevalencias.

Nótese que un mismo conjunto de síntomas podría dar lugar a un diagnóstico diferente en poblaciones en las que las prevalencias fueran diferentes.

Pruebas diagnósticas: Supóngase una prueba diagnóstica, por ejemplo nivel de glucosa en sangre, en ayunas, para diagnosticar la diabetes. Se considera que la prueba es positiva si se encuentra un nivel por encima de un cierto valor, digamos 120 mg/l.

Para *evaluar* la prueba, (habrá que hacerlo para distintos valores de corte) se somete a la misma a una serie de individuos diabéticos diagnosticados por otro procedimiento (el *patrón de oro* o "*gold standar*") y a una serie de individuos no diabéticos. Los resultados se pueden representar en una tabla de doble entrada

		Patrón de oro		
		NE	E	
Prueba	-	a	b	r
	+	c	d	s
		t	u	

Si la prueba fuera perfecta b=c=0, desgraciadamente nunca ocurre. Se denomina *coeficiente falso-positivo* (CFP) al cociente c/t, y es una estimación de la probabilidad condicionada p(+|NE), se denomina *coeficiente falso-negativo* (CFN) al cociente b/u, y es una estimación de la probabilidad condicionada p(-|E). Estos dos coeficientes cuantifican los dos errores que la prueba puede cometer y caracterizan a la misma. Simétricamente, los coeficientes que cuantifican los aciertos son la *sensibilidad*, p(+|E), y la *especificidad* p(-|NE).

Cuando la prueba se usa con fines diagnósticos (o de "screening") interesa calcular p(E|+) y/o p(NE|-). como E y NE son una partición, usando el Teorema de Bayes

$$p(E|+) = \frac{p(+|E)p(E)}{p(+|E)p(E) + p(+|NE)p(NE)}$$

y

$$p(NE|-) = \frac{p(-|NE)p(NE)}{p(-|E)p(E) + p(-|NE)p(NE)}$$

Nótese que ambas dependen de la prevalencia de la enfermedad: una prueba diagnóstica que funciona muy bien en la clínica Mayo, puede ser inútil en el Hospital Ramón y Cajal.

Ejemplo 8: una prueba diagnóstica para la diabetes tiene un CFP de 4% y un CFN del 5%. Si la prevalencia de la diabetes en la población donde se usa es del 7% ¿cuál es la probabilidad de que sea diabético un individuo en el que la prueba dé positiva? y ¿de que no lo sea uno en el que dé negativo?

p(+|NE) = 0,04 □ p(-|NE) = 0,96 p(-|E) = 0,05 □ p(+|E) = 0,95 p(E) = 0,07 □ p(NE) = 0,93

$$p(E|+) = \frac{0{,}95 \times 0{,}07}{0{,}95 \times 0{,}07 + 0{,}04 \times 0{,}93} = 0{,}641$$

y

$$p(NE|-) = \frac{0{,}96 \times 0{,}93}{0{,}05 \times 0{,}07 + 0{,}96 \times 0{,}93} = 0{,}996$$

Pruebas en serie: Cuando se aplican pruebas en serie, para cada prueba p(E) y p(NE), serán la p(E|+) y p(NE|+) de la prueba anterior (si dio positiva) o p(E|-) y p(NE|-) si dio negativa

2.6 VALORACIÓN DE PROBABILIDADES SUBJETIVAS

Cuando no dispongamos de registros numéricos para el cálculo de probabilidades según la expresión <<números de casos favorables/número de casos posibles>>, es necesario comprometer el nivel de incertidumbre asociado a un suceso con una cierta expresión de grado, a la que denominamos probabilidad subjetiva. Una probabilidad subjetiva, es, fundamentalmente, el grado de creencia que una decisor tiene sobre la posible ocurrencia de un suceso.

Consistencia de los valores

Los valores de nuestras creencias deben reflejar el grado de nuestra incertidumbre, pero además deberán poseer un cierto grado de consistencia. La consistencia, como señala French (1989), puede resumirse en el cumplimiento de las leyes de Kolmogorov:

1. Cualquier valor de probabilidad será un valor entre 0 y 1.
2. Para dos conjuntos exclusivos, A y B, la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.

Dos sucesos son exclusivos si, ocurrido uno de ellos no puede ocurrir el otro.

Cuando ocurren varios sucesos secuencialmente, como pasa en el desarrollo de las ramas de los árboles de decisión, es pertinente plantearse si unos sucesos son independientes de otros, o si una vez que ha ocurrido un suceso, éste afecta a los que siguen. En términos de probabilidad podemos decir que la ocurrencia de un suceso modifica la probabilidad de ocurrencia de otro.

Podemos decir que los sucesos son independientes cuando, ocurra o no uno de ellos, la probabilidad del otro permanece constante. Por tanto, dos sucesos que ocurren secuencialmente pueden ser independientes o dependientes. Si son independientes podemos evaluar probabilidad subjetiva de cada uno sin tener en cuenta el otro. Si son dependientes, debemos evaluar la probabilidad del segundo teniendo encuenta que antes ha ocurrido el otro.

Si los sucesos son independientes como dependientes, una ves que se han evaluado correctamente la probabilidad de la secuencia e s el producto de las probabilidades de los sucesos que la componen.

Cuando varios acontecimientos ocurren secuencialmente y todos son ciertos, la probabilidad de la ocurrencia de toda la secuencia es el producto de las probabilidades de los sucesos que la componen.

2.7 PROCEDIMIENTOS DE ELICITACIÓN

Preparación

Spetzler y Stäel von Holstein (1975) hablan de subdividir todo el proceso en 3 partes: motivación, estructuración y condicionamiento. La primera corresponde a la preparación, mientras que las otras dos hacen referencia a la dependencia respecto a otros sucesos y a la evitación de posibles sesgos. En la preparación es importante la motivación de la decisión y, consiguientemente, la importancia de los valores que se van a estimar.

Métodos directos

La forma más directa posible es, desde luego, preguntarse por cuál es la probabilidad de algo y responder con un número entre 0 y 1. Suele resultar más cómodo hablar de porcentajes de posibilidades. En los casos donde el número de opciones sea muy elevado, podemos hacer grandes grupos que faciliten el trabajo. Una vez definidos todos los sucesos debemos preguntarnos por las posibilidades de cada uno de ellos de forma independiente. El objetivo de todos los procedimientos de elicitación de probabilidades es encontrar incongruencias que provoquen la revisión de nuestros juicios. Cuando evaluemos directamente una probabilidad, siempre hemos de tener en cuenta la descomposición del suceso y las condicionantes que puedan cambiar el valor inicial.

Hemos ideado la siguiente técnica para elicitar probabilidades subjetivas de forma directa:

a) Reunir todos los sucesos cuyas probabilidades subjetivas tengan que ser elicitadas.
b) Seleccionar al azar la mitad de ellos y asignar los valores numéricos de probabilidad.
c) Trazar en una hoja de papel una línea recta. Colocar los valores 0 y 1 en ambos extremos. Marcar una señal en la línea representando cada uno de los valores de probabilidad que restan por ser elicitados. Con ayuda de una regla, medir las distancias al punto 0 y después convertirlas en escala 0-1.
d) Reevaluar las incongruencias.

Métodos indirectos

Estos métodos consisten en presentar un juego(cuya probabilidad de éxito es conocida) y pedir al decisor que manifieste su preferencia entre el juego y la situación en la que aparece el suceso probabilística.

2.8 SESGOS

El sesgo de representatividad, el cual se produce cuando juzgamos la probabiilidad de pertenencia de un objeto a una clase apoyándonos en los rasgos más representativos de la clase.

También podemos sesgar las estimaciones de probabilidad al evaluar los sucesos próximos y conocidos (accesibilidad), frente a lejanos y menos conocidos (Tversky y Kohneman, 1973).

Cuando realizamos elicitaciones en cadena, podemos sesgar la primera estimación y en consecuencia, al tratar que el resto sea congruente, sesgar también los demás. A este error se le denomina anclaje y ajuste (Tversky y Kohneman, 1974).

Un caso de sesgo típico es el llamado sobre confianza, aplicable a situaciones en los que se tienen que expresar datos en forma probabilística.

Conocer la existencia de posibles sesgos en la valoración de posibilidades tiene dos objetivos si:

1. El ser consciente de las situaciones y de los tipos de errores que podemos cometer nos debe ayudar a evitarlos y, por tanto a producir mejores valoraciones.
2. Ser conscientes de nuestra falibilidad debe hacernos proclives a revisar nuestras opiniones a la luz de nueva información, tras sucesivos ajustes, que nuestros análisis de decisiones sean cada vez más consistentes.

2.9 LA ACTITUD HACIA EL RIESGO

Existe una característica de nuestra conducta de toma de decisiones que, sin llegar a ser considerada como sesgo, presenta desviaciones de la que podríamos llamar <<regla formal>>. Esta característica a la que nos estamos refiriendo es la actitud hacia el riesgo: hay sujetos que buscan mejores resultados y asumen grandes riesgos y otras que prefieren opciones menos prometedoras, pero más seguras. A los primeros se les denomina arriesgados y a los segundos conservadores. La mayoría tendemos a ser conservadores en unas circunstancias y arriesgados en otras.

Las circunstancias, nos llevan a tomar posturas diferentes, asumiendo riesgos distintos.

La ambigüedad en la toma de decisiones se refiere a la confianza que tenemos en la información de la s probabilidades. El grado de ambigüedad es absolutamente independiente del valor de probabilidad al que se refiera.

BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, David R.; Sweeney, Dennis J. Y Williams, Thomas. MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LOS NEGOCIOS. 7ª. Edición. México, Thomson, 1999. 835 pp.
- Davis, Roscoe K. Y Mckeown, Patrick G. MODELOS CUANTITATIVOS PARA ADMINISTRACIÓN. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993. 758 pp.
- León, Orfelio G. ANÁLISIS DE DECISIONES. TÉCNICAS Y SITUACIONES APLICABLES A DIRECTIVOS Y PROFESIONALES. México, Mc Graw Hill:, 1995. 237 pp.