

El siguiente libro digitalizado es propiedad del Departamento de Matemáticas.

Los Autores son: Patrick Suppes y Hill. Prohibida su reproducción total o parcial sin previo consentimiento del autor.

Las imágenes fueron digitalizadas con baja resolución a petición de la editorial y del autor, pidiéndote amablemente que adquieras el libro de Introducción a la Lógica Matemática.

El Departamento de Matemáticas como el webmaster tienen el libro Introducción a la Lógica Matemática y este libro no es utilizado con fines de lucro.

No es todo el libro completo, solo los capítulos que se verán en la materia Matemáticas de Posgrado en Sistemas, para consulta académica solamente, cualquier otro uso será penalizado legalmente por las leyes internacionales.

Profesor: Gabriel Martínez Chávez.

Webmaster: Alfonso Guillén V.



Patrick Suppes es profesor emérito del Departamento de Lenguaje de la Universidad de California, sus escritos comprenden desde Psicología hasta el campo de las Matemáticas.

Recomendamos ampliamente el libro Introducción a la Lógica Matemática para estudios de Posgrado.

CAPITULO 1

SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

● 1.1 *Proposiciones*

Con el estudio de la Lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso. La Lógica tiene un lenguaje exacto. Pero aunque así sea, vamos a intentar construir un vocabulario para este lenguaje preciso utilizando el lenguaje cotidiano algunas veces un tanto confuso. Es necesario redactar un conjunto de reglas que sean perfectamente claras y definidas y que estén libres de las vaguedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente. Para realizar este trabajo se utilizarán proposiciones en lengua castellana, de la misma manera que se usa la lengua castellana para explicar las reglas precisas de un juego a alguien que no ha jugado a ese juego. Por supuesto, la lógica es algo más que un juego. Puede ayudarnos a aprender una forma de razonar que es exacta y a la vez muy útil.

Para empezar, consideremos las proposiciones en lengua castellana. Cada proposición tiene una forma lógica a la que se le dará un nombre. En primer lugar, se consideran y simbolizan dos clases de proposiciones en Lógica; unas se denominan proposiciones *atómicas* y otras proposiciones *moleculares*.

En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra *atómico* muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, *atómicas* son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición *molecular*. Una proposición atómica es una proposición completa sin términos de enlace. Se utilizan términos de enlace para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Por ejemplo, considérense dos proposiciones atómicas,

Hoy es sábado.

No hay clase.

Ambas proposiciones son atómicas. Mediante un término de enlace se pueden unir y se tendrá una proposición molecular. Por ejemplo, se puede decir

Hoy es sábado y no hay clase.

Esta proposición molecular se ha construido con dos proposiciones atómicas y el término de enlace «y». Cuando analizamos una proposición molecular la descomponemos en las más pequeñas proposiciones atómicas completas. En el ejemplo anterior se puede descomponer la proposición molecular en dos proposiciones atómicas. El término de enlace «y» no forma parte de ninguna de las proposiciones atómicas. Se ha añadido a las proposiciones atómicas para construir una proposición molecular.

● 1.2 Términos de enlace

Las palabras de enlace, por cortas que sean, no deben subestimarse, pues son de gran importancia. Tanto es así, que se estudiarán algunas reglas muy precisas para el uso de esta clase de términos. Gran parte de lo que se tratará en el estudio de la Lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace. El término de enlace en la proposición del ejemplo «Hoy es sábado y no hay clase» es la palabra «y». Hay otros, pero antes de considerar cada uno de ellos separadamente, les daremos el nombre lógico correcto. Se les denominará *términos de enlace de proposiciones*. Este nombre será fácil de recordar, porque indica efectivamente cuál es el papel que desempeñan. Enlazan proposiciones. Forman proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Los términos de enlace que se utilizarán en este capítulo son las palabras «y», «o», «no», y «si..., entonces». En la gramática castellana se les da a veces otros nombres, pero en Lógica los denominaremos, como ya hemos indicado, *términos de enlace de proposiciones* o simplemente *términos de enlace*. Recuérdese que al añadir un término de enlace a una o dos proposiciones atómicas se ha formado una proposición molecular. Los tres términos de enlace considerados, «y», «o», «si..., entonces», se usan para enlazar dos proposiciones atómicas, pero el otro se agrega a una sola proposición atómica para formar una molecular. Este término de enlace es la palabra «no». Se puede decir que el término de enlace «no» cada vez actúa sobre una sola proposición atómica y que los otros términos de enlace actúan sobre dos proposiciones atómicas a la vez. Recuérdese que el término de enlace «no», es el único que no conecta realmente dos proposiciones. Cuando a una sola proposición se le agrega «no» se forma una proposición molecular.

Se dan a continuación algunos ejemplos de proposiciones moleculares que utilizan los términos de enlace considerados.

La proposición

La luna no está hecha de queso verde

es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». En este caso, el término de enlace actúa sólo sobre una proposición atómica: «La luna está hecha de queso verde».

Un ejemplo de una proposición en la que se utiliza el término de enlace «o» es

El viento arrastrará las nubes o lloverá hoy con seguridad.

El término de enlace «o» actúa sobre dos proposiciones atómicas. Son «El viento arrastrará las nubes» y «Lloverá hoy con seguridad».

La proposición molecular:

Si estamos en diciembre entonces llegará pronto Navidad

ilustra sobre el uso del término de enlace «si..., entonces», que también actúa sobre dos proposiciones atómicas. ¿Cuáles son?

Ya se ha dado un ejemplo de proposición que utiliza el término de enlace «y». Otra es:

El terreno es muy rico y hay suficiente lluvia.

¿Cuáles son las dos proposiciones atómicas contenidas en esta proposición molecular??

Los ejercicios que se ponen a continuación ofrecen una oportunidad para comprobar la habilidad del lector para reconocer proposiciones atómicas, proposiciones moleculares y términos de enlace. Recuérdese que cada proposición que contiene un término de enlace es molecular.

EJERCICIO 1

A. Señalar cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M. Escribir junto a cada proposición molecular el término de enlace utilizado.

1. La comida será hoy a las tres en punto.
2. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.
3. La música es muy suave o la puerta está cerrada.
4. A este perro grande le gusta cazar gatos.

5. El pregunta por su pipa y pregunta por su escudilla.
6. Luis es un buen jugador o es muy afortunado.
7. Si Luis es un buen jugador, entonces participará en el partido del colegio.
8. California está al oeste de Nevada y Nevada al oeste de Utah.
9. Muchos estudiantes estudian Lógica en el primer año de carrera.
10. Los gatitos no acostumbran a llevar mitones.
11. Si los gatitos llevan mitones, entonces los gatos pueden llevar sombreros.
12. Se puede encontrar a Juana en casa de Susana.
13. A las focas no les crece el pelo.
14. Si María canta, entonces es feliz.
15. Los alumnos mayores no están en la lista antes que los jóvenes.
16. La asignatura preferida de Jaime es Matemáticas.
17. Si aquellas nubes se mueven en esa dirección, entonces tendremos lluvia.
18. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.
19. Esta proposición es atómica o es molecular.
20. El sol calentaba y el agua estaba muy agradable.
21. Si $x=0$ entonces $x+y=1$.
22. $x+y>2$.
23. $x=1$ o $y+z=2$.
24. $y=2$ y $z=10$.

B. Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando una o dos de las proposiciones escritas a continuación junto con un término de enlace. Por ejemplo, se puede poner el término de enlace «y» entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición atómica más de una vez. Utilícese cada uno de los cuatro términos de enlace *una sola vez*, de manera que cada una de las proposiciones moleculares tenga distinto término de enlace.

1. El viento sopla muy fuerte.
2. Pablo podría ganar fácilmente.
3. La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.
4. Veremos qué planes hay para mañana.
5. Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.
6. El amigo de Juan tiene razón.
7. Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta.

C. Decir cuáles son los términos de enlace en las proposiciones siguientes. Decir cuántas proposiciones atómicas se encuentran en cada proposición molecular. Recuerdese que «si..., entonces» es un solo término de enlace.

1. Este no es mi día feliz.
2. Ha llegado el invierno y los días son más cortos.
3. Muchos gérmenes no son bacterias.
4. Los anfibios se encuentran en el agua fresca o se encuentran en la tierra cerca de sitios húmedos.
5. Si hay fallas en las grandes masas rocosas, entonces es posible que ocurran terremotos.
6. Este número es mayor que dos o es igual a dos.
7. Si es un número positivo entonces es mayor que cero.
8. Este chico es mi hermano y yo soy su hermana.
9. Mi puntuación es alta o recibiré una calificación baja.
10. Si usted se da prisa entonces llegará a tiempo.
11. Si $x>0$ entonces $y=2$.
12. Si $x+y=2$ entonces $z>0$.
13. $x=0$ o $y=1$.
14. Si $x=1$ o $z=2$ entonces $y>1$.
15. Si $z>10$ entonces $x+z>10$ y $y+z>10$.
16. $x+y=y+x$.

D. Escribir primero cinco proposiciones atómicas y formar después cinco proposiciones moleculares.

1.3. La forma de las proposiciones moleculares

Las reglas para el uso de los términos de enlace son las mismas, cualesquiera que sean las proposiciones atómicas que enlazan o en las que se han utilizado. En uno de los ejercicios anteriores se vio que era posible elegir una o dos proposiciones atómicas cualesquiera de un grupo y combinarlas con un término de enlace. La *forma* de las proposiciones moleculares construidas depende del término de enlace seguido, no del contenido de la proposición o proposiciones atómicas. Es decir, si en una proposición molecular se sustituyen las proposiciones atómicas por otras proposiciones atómicas cualesquiera, la forma de la proposición molecular se conserva. La misma manera de escribir el término de enlace «si..., entonces...» lo indica. Los puntos suspensivos después de «si» y los puntos suspensivos después de «entonces» ocupan el lugar de las proposiciones. Para formar proposiciones moleculares utilizando este término de enlace basta simplemente sustituir los puntos suspensivos por proposiciones atómicas *cualquiera*.

Podemos darnos cuenta fácilmente de la *forma* de una proposición molecular, no escribiendo las proposiciones atómicas de que consta y sólo indicando el lugar que ocupan. Se puede representar la forma de una proposición molecular utilizando el término de enlace «y» de la manera si-

guiente

_____ y _____

o bien

() y ()

Se pueden sustituir los espacios por cualquier proposición y la forma es la misma. Por ejemplo, eligiendo las proposiciones «Es rojo» y «Es azul» y poniéndolas en los espacios señalados, se tiene la proposición molecular «Es rojo y es azul». Se podrían haber escogido otras dos proposiciones atómicas y formar, por ejemplo, la proposición «Yo soy alto y él es bajo». La forma permanece la misma. Se trata de una proposición molecular en la que se utiliza el término de enlace «y». Otra manera de poner de manifiesto la forma es encerrar entre paréntesis las proposiciones atómicas, cuando se ha escrito la proposición molecular como en los ejemplos siguientes:

(Es rojo) y (es azul).

(Llueve) y (Pedro se ha mojado).

Hemos dicho que se pueden llenar los espacios con proposiciones cualesquiera, incluso sin limitarnos a proposiciones atómicas. Se pueden también utilizar proposiciones moleculares y la forma es la misma. Por ejemplo, se puede llenar el primer espacio con la proposición molecular «Juan no está aquí», y el segundo espacio con la proposición molecular «Andrés no está aquí». La proposición será entonces

Juan no está aquí y Andrés no está aquí.

De nuevo, la forma es la misma. El término de enlace «y» enlaza dos proposiciones, pero en este caso son proposiciones moleculares.

También se podría utilizar una proposición molecular y una proposición atómica, como en:

Juan no está aquí y Luis está aquí.

Lo importante es que cualesquiera que sean las proposiciones con las que se llenen los espacios, la forma es la de una proposición molecular con el término de enlace «y».

Todo lo dicho es aplicable a los otros términos de enlace. Podemos poner de manifiesto la forma de otros tipos de proposiciones moleculares de la manera siguiente:

() o ().

Si () entonces ().

Se pueden llenar los espacios con proposiciones cualesquiera, atómicas o mo-

leculares. A continuación se dan ejemplos, en algunos de los cuales se usan paréntesis para mayor claridad.

María está aquí o Elena está en casa.

(Juan está en la ciudad) o (María no está en casa).

Si $2+3=x$ entonces $x=5$.

Si $(y+1=4)$ entonces $(y=3)$.

Si (José no es infiel) entonces (Juan es fiel).

Algunas veces, en castellano se utiliza una sola palabra para un término de enlace particular, pero otras veces se usan dos o más. Por ejemplo, se puede utilizar la única palabra «o» como término de enlace como en:

Es muy pesado o es hueco,

o se puede escribir la misma frase añadiendo la palabra «o» al principio como una parte del término de enlace:

O es muy pesado o es hueco.

Las dos palabras «o» son partes del mismo término de enlace. En las proposiciones en castellano algunas veces se utiliza «o»-«o» y otras sólo «o». Cuando se hable del término de enlace «o» se sobreentenderá que puede incluir también una «O» inicial, si se desea utilizar. La forma para el término de enlace «o» puede ser, por tanto:

O () o ().

Los ejemplos que siguen son de esta forma:

O Juan está aquí o no llueve.

O (María no está aquí) o (Susana no está aquí).

O $x+y=6$ y $y=2$, o $x=0$.

O $(x+y=7$ y $y \neq 2)$ o $(x > 0)$.

En algunos casos, al utilizar el término de enlace «y» pueden incluirse las palabras «A la vez». Por ejemplo, se puede decir:

A la vez llueve y sale el sol.

Las palabras «a la vez» e «y» son partes de un mismo término de enlace. En general sólo se utiliza «y», pero ocasionalmente también «a la vez». Siempre nos referiremos al término de enlace «y», pero podrá presentarse

en la forma:

A la vez () y ().

Por ejemplo,

A la vez $(x > 0)$ y $(y \neq 0)$.

A la vez $x \neq y$ y $y \neq z$.

En muchos casos en que se utiliza el término de enlace «si..., entonces...» se incluyen ambas palabras, sin embargo, frecuentemente nos encontramos que se suprime la palabra «entonces». Por ejemplo:

Si es Felipe, es lento.

Proposiciones de esta clase están formadas por el término de enlace «si..., entonces...» y son de la forma:

Si (), ().

Ejemplos de esta forma son:

Si $x+y=2$ y $y=0$, $x=2$.

Si $(x+y=7$ y $x=6)$, $(y=1)$.

Si María quiere a Juan, Juan quiere a María.

La palabra «no», en castellano, se encuentra muy frecuentemente dentro de las proposiciones atómicas. Por este motivo es fácil olvidarla. Pero una proposición tal como:

La lógica no es difícil,

es una proposición molecular puesto que contiene el «no». Es posible escribir este término de enlace utilizando la frase «no ocurre que». La proposición se leería entonces:

No ocurre que la lógica sea difícil.

Entonces es posible presentar la forma de una proposición molecular utilizando el término de enlace «no» del siguiente modo:

No ocurre que (),

o más brevemente:

no ().

Ejemplos de esta forma son:

No ocurre que $(x=0)$.

No ocurre que $(x+y > 2)$.

No $(x=2+1)$.

No $(7 > x+y)$.

Evidentemente, el uso de «No ()» es infrecuente en el lenguaje castellano, pero se verá más tarde que es de utilidad su uso en los contextos matemáticos.

En las proposiciones matemáticas en las que se utiliza el signo igual =, se indica con frecuencia la negación con un trazo inclinado sobre el signo igual: \neq . Así, « $x \neq 1$ » se lee « x no es igual a 1».

En ninguna de las dos proposiciones « $x \neq 1$ » y «Juan no está aquí», se puede utilizar el paréntesis para mostrar la forma de la proposición molecular, porque el término de enlace «no» aparece dentro de la proposición atómica.

EJERCICIO 2

A. Utilizar el paréntesis para poner de manifiesto la forma de las siguientes proposiciones moleculares.

- Juan está aquí y María ha salido.
- Si $x+1=10$ entonces $x=9$.
- O María no está aquí o Juan se ha ido.
- Si $x=1$ o $y=2$ entonces $z=3$.
- Si $x \neq 1$ y $x+y=2$ entonces $y=2$.
- Si Pedro está en casa o Juan está en el patio, entonces José es inocente.
- $y=0$ y $z=0$.
- O $y=0$ y $x \neq 0$ o $z=2$.
- No ocurre que $6=7$.
- No ocurre que si $x+0=10$ entonces $x=5$.

B. Escribir en lenguaje corriente proposiciones de las formas siguientes. Suprimir los paréntesis al escribir las proposiciones.

- O () o ().
- () o ().
- A la vez () y ().
- () y ().
- No ().
- Si () entonces ().
- Si (), ().
- Si no () entonces no ().
- No ocurre que ().

● 1.4 Simbolización de proposiciones

Generalmente se cree que las proposiciones atómicas son proposiciones cortas, pero también algunas de las proposiciones atómicas del lenguaje corriente son largas, resultando por ello pesadas y de difícil manejo. En Lógica se afronta este problema utilizando símbolos en lugar de las proposiciones completas.

Los símbolos que usaremos en lógica para representar proposiciones, son letras mayúsculas tales como «P», «Q», «R», «S», «A», y «B». Por ejemplo, sea:

P = «La nieve es profunda».

Q = «El tiempo es frío».

Consideremos ahora la proposición «La nieve es profunda y el tiempo es frío». Primero escribiremos la forma lógica de la proposición haciendo uso de los paréntesis:

(La nieve es profunda) y (el tiempo es frío).

Utilizando «P» y «Q» queda simbolizada la proposición de la manera siguiente:

(P) y (Q).

Supongamos ahora que se desea simbolizar una proposición molecular que utiliza el término de enlace «o», y se considera la proposición «Se puede elegir sopa o se puede elegir ensalada». La simbolizaremos de la manera siguiente:

Sea

R = «Se puede elegir sopa»

S = «Se puede elegir ensalada».

y la proposición quedará simbolizada por

(R) o (S).

Al simbolizar una proposición que contiene el término de enlace «no», la palabra «no» se pone delante del símbolo que sustituye a la proposición atómica, aunque ordinariamente en castellano la palabra «no» se encuentre dentro de la proposición atómica sobre la que actúa. El término de enlace, sin embargo, no es una parte de la proposición atómica y, por tanto, la palabra «no», debe separarse de la proposición atómica. Por ejemplo, simbolizaremos la proposición «Los patos no son animales de cuatro patas» de la siguiente manera:

Sea

Q = «Los patos son animales de cuatro patas».

la proposición molecular será entonces

No (Q).

El último símbolo sustituye sólo a la proposición atómica y no incluye el término de enlace.

Se verá más adelante que si se utilizan símbolos para las proposiciones atómicas es más fácil trabajar con las proposiciones moleculares, que pueden resultar muy largas y complicadas.

Los ejercicios que se dan a continuación pueden servir para adquirir práctica en la simbolización de proposiciones.

EJERCICIO 3

A. Simbolizar las proposiciones moleculares siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas.

1. Necesito ponerme las gafas o esta luz es débil.

Sea

G = «Necesito ponerme las gafas»

L = «Esta luz es débil».

entonces la proposición queda simbolizada en la forma

(G) o (L).

2. Los patitos no se transforman en cisnes.
3. Daba tres pasos hacia la derecha y entonces iba dos pasos hacia adelante.
4. Estos problemas no son fáciles para mí.
5. Si suena el timbre, entonces es hora de empezar la clase.
6. Si la clase de Química ya ha empezado entonces llego tarde.
7. Una parte de la Luna no se ve desde la Tierra.
8. O Antonio irá al teatro o irá al cine.
9. Las rosas son rojas y las violetas son azules.
10. Si Brasil está en Sudamérica entonces está en el hemisferio Sur.

B. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes en otras que tengan la misma forma. (Utilizar el mismo término de enlace y sustituir las letras con proposiciones atómicas.) Especificar cuál es la proposición atómica representada por cada una de las letras.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1. Si (P), entonces (Q) | 6. No (P) |
| 2. (R) o (S) | 7. (R) y (T) |
| 3. (P) y (Q) | 8. (S) o (Q) |
| 4. No (E) | 9. No (T) |
| 5. Si (S), entonces (B) | 10. Si (R), entonces (S). |

C. Cada una de las proposiciones siguientes es molecular. Primero indicar cuáles son el término o términos de enlace de cada proposición. Después escribir separadamente las proposiciones atómicas que se encuentran en cada una de las proposiciones moleculares.

- Juan es el segundo y Tomás es el cuarto.
- O Jaime es el ganador o Luis es el ganador.
- José no es el ganador.
- Si Tomás es el ganador entonces él tendrá la medalla.
- Si Tomás no es el ganador entonces debe colocarse en segundo lugar.
- Los Alpes son montañas jóvenes y los Appalaches son montañas viejas.
- Las arañas no son insectos.
- Si las arañas son insectos entonces han de tener seis patas.
- Si un material se calienta entonces se dilata.
- Muchos planetas son o demasiado cálidos para que vivan seres como nosotros o demasiado fríos para que vivan seres como nosotros.

D. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas. Recuérdese que \neq es la negación de $=$.

- Si $x=y$ entonces $x=2$.
- Si $x \neq 2$ entonces $y > 1$.
- Si $x \neq 2$ o $x \neq 3$ entonces $x=1$.
- Si $x+y=3$ entonces $y+x=3$.
- Si $x-y=2$ entonces $y-x \neq 2$.
- $x+y=2$ y $y=1$.
- $x+y+z=2$ o $x+y=10$.
- Si $x \neq y$ y $y \neq z$ entonces $x > z$.
- Si $x+y > z$ y $z=1$ entonces $x+y > 1$.
- Si $x \neq y$, entonces $x \neq 1$ y $x \neq 2$.

● 1.5 Los términos de enlace y sus símbolos

Ahora que ya sabemos simbolizar proposiciones atómicas, el trabajar con

proposiciones moleculares resulta mucho más fácil. Pero también se pueden utilizar símbolos para los mismos términos de enlace. Se considerará cada término de enlace por separado y se le asignará un símbolo. También se dará un nombre a la proposición molecular que se forme utilizando cada uno de los términos de enlace. Estos términos de enlace son tan importantes que se estudiarán por separado en las secciones siguientes, revisando algunas de las cuestiones ya analizadas.

Y. La unión de dos proposiciones con la palabra «y», se denomina *conjunción* de las dos proposiciones. Un ejemplo de una conjunción es esta proposición:

Sus ojos son azules y los ojos de su hermano también son azules.

Sea P la proposición atómica «Sus ojos son azules» y sea Q la proposición atómica «Los ojos de su hermano también son azules». Entonces se puede simbolizar la proposición molecular, que es una conjunción, por

$$(P) \text{ y } (Q).$$

Una conjunción es un tipo de proposición molecular. La proposición molecular es la conjunción de la proposición atómica P y la proposición atómica Q. Es también útil introducir un símbolo para «y». Nosotros usaremos el símbolo que se encuentra en la mayoría de las máquinas de escribir:

$$\&$$

Utilizando este símbolo, se puede escribir la conjunción de dos proposiciones P y Q de la forma:

$$(P) \& (Q).$$

Recuérdese que el símbolo & sustituye al término de enlace completo tanto si se refiere a «y» como si es «a la vez... y...» en lengua castellana.

ERJERCICIO 4

A. Simbolizar las proposiciones siguientes, completamente, utilizando el símbolo lógico correspondiente para los términos de enlace. Indicar la proposición atómica que corresponde a cada letra.

- Juan vive en nuestra calle y Pedro en la manzana contigua.
- Los discos antiguos de José son buenos pero los modernos son todavía mejores.

3. Metió la nariz y ya sacó tajada.
4. El sol desaparece detrás de las nubes y en seguida empieza a refrescar.
5. El reactor se elevaba a nuestra vista y dejaba tras sí una fina estela blanca.
6. Juana tiene trece años y Rosa quince.
7. Jorge es alto y Andy es bajo.
8. La estrella de mar es un equinodermo y los erizos de mar son también equinodermos.
9. Hoy es día treinta y mañana será primero.
10. El juego ha empezado y llegaremos tarde.

B. Terminar la simbolización de las proposiciones que siguen sustituyendo el término de enlace por el correspondiente símbolo lógico.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. (P) y (Q) | 4. A la vez (T) y (G) |
| 2. A la vez (A) y (B) | 5. (S) y (Q) |
| 3. (H) y (K) | |

C. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes. Es decir, se han de sustituir las letras por proposiciones en lengua castellana y el símbolo lógico por el término de enlace correspondiente.

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. (P) & (Q) | 4. (B) & (H) |
| 2. (R) & (S) | 5. (Q) & (P) |
| 3. (T) & (C) | |

D. En las proposiciones matemáticas siguientes, simbolizar sólo el término de enlace «y».

1. $x=0$ y $y=4$.
2. $x \neq 0$ y $x+y=2$.
3. $x-x=0$ y $x+0=x$.
4. $x+y=y+x$ y $x+(y+z)=(x+y)+z$.

O La unión de dos proposiciones por medio de la palabra «o» se denomina *disjunción* de las dos proposiciones. Por ejemplo:

Esta es el aula cuatro o es una aula de Física,

es la *disjunción* de dos proposiciones. Una disjunción es una proposición molecular formada por el término de enlace «o». La proposición antes escrita

puede parecer un poco rara. Probablemente esto es debido a que en el lenguaje corriente se incluye la palabra «o» inicial junto con la palabra «o» central. Por ejemplo, se podría leer la proposición molecular considerada en la forma:

O ésta es el aula cuatro o es una aula de Física.

En ambos casos, las dos proposiciones atómicas son las mismas; primero, la proposición «Esta es el aula cuatro», y segundo «Esta es una aula de Física». Es decir, no debe incurrirse en el error de incluir la «o» inicial como parte de la primera proposición. Se trata de una parte del término de enlace.

El símbolo que utilizaremos para la disjunción es: \vee .

En el ejemplo precedente, si F es la proposición «Esta es el aula cuatro» y R es la proposición «Esta es una aula de Física», entonces la disjunción queda completamente simbolizada por:

(F) \vee (R).

Leeremos esta proposición diciendo (F) o (R), y algunas veces también o (F) o (R). Recuérdese que el símbolo \vee representa el término de enlace completo, tanto si en la lectura o escritura de la proposición se emplea sólo *o* o bien «o... o...».

EJERCICIO 5

A. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, utilizando el símbolo que corresponde a cada término de enlace. Indicar la proposición atómica sustituida por cada letra.

1. El área del triángulo ABC es igual al área del triángulo DEF, o el área del triángulo ABC es menor que el área del triángulo DEF.
2. Tomará parte en el salto de altura o correrá media milla.
3. O tomará parte en la representación o ayudará en el vestuario.
4. O el bote cruzó la barra o se lo tragaron las olas.
5. Hemos de llegar allí antes, u otro recibirá el empleo.
6. O la aguja está gastada o la grabación es mala.
7. O Juan será reelegido o destinado para un puesto nuevo.
8. Se puede dar el vector por medio de dos componentes, o estamos en tres dimensiones.

Los términos de enlace se pueden utilizar con una o más proposiciones moleculares, de la misma manera que con las atómicas. Por ejemplo, en la forma «Si () entonces ()», se pueden llenar los espacios vacíos con proposiciones atómicas o con proposiciones moleculares. Las negaciones se combinan frecuentemente con otras proposiciones para formar una proposición molecular más larga. Por ejemplo,

Si un número es mayor que 0, entonces no es un número negativo

es una proposición molecular de la forma «si..., entonces...» en la que el término de enlace usa una proposición atómica y una negación. La forma, «O () o ()» puede incluir negaciones como en la siguiente disjunción:

O el juego no ha empezado o el público no es numeroso.

Aquí se tiene una disjunción de dos proposiciones moleculares, ambas negaciones. Se simboliza esta proposición de la misma manera que se simbolizan otras proposiciones moleculares. En primer lugar, su forma lógica se puede presentar con mayor claridad poniendo paréntesis en la proposición escrita:

(O el juego no ha empezado) o (el público no es numeroso).

Elegida una letra mayúscula para cada proposición atómica se expresa su negación poniendo el símbolo \neg delante de la letra. Después, se enlazan las dos proposiciones moleculares por el término de enlace dominante, que en este caso es el término de enlace «o». La proposición completamente simbolizada se presenta en la forma

$$(\neg S) \vee (\neg C).$$

EJERCICIO 6

A. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, utilizando los símbolos correspondientes a cada término de enlace. Indicar las proposiciones atómicas sustituidas por cada letra mayúscula.

1. En el hemisferio Sur, Julio no es un mes de verano.
2. Los tubos de neón no son incandescentes.
3. No ocurre que a todos los ingresos les correspondan impuestos proporcionales.

4. Marte no está tan cercano al Sol como la Tierra.
5. Texas no es el mayor estado en los Estados Unidos.
6. No ocurre que todos los líquidos hiervan a la misma temperatura.
7. John Quincy Adams no fue el segundo Presidente de los Estados Unidos.
8. No todos los gérmenes son bacterias.
9. No ocurre que la ortiga de mar sea una planta.
10. Luisa no es una persona alta.

B. Simbolizar las proposiciones siguientes utilizando el símbolo correspondiente para cada término de enlace.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. No ocurre que (R) | 4. No ocurre que (T) |
| 2. No (Q) | 5. No (J) |
| 3. No (H) | |

C. En las proposiciones siguientes se utiliza más de un término de enlace. Simbolizar completamente las proposiciones sustituyendo los términos de enlace por los símbolos correspondientes.

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1. (P) y no (Q) | 4. O no (P) o no (Q) |
| 2. No (R) y no (M) | 5. (T) y no (R) |
| 3. (S) o no (B) | |

D. Primero señalar cada término de enlace en las proposiciones que siguen. Después, simbolizar la proposición entera sustituyendo P = «Jaime es puntual» y Q = «Tom llega tarde» en las cinco proposiciones.

1. O Jaime es puntual o Tom llega tarde.
2. O Jaime no es puntual o Tom llega tarde.
3. Tom llega tarde y Jaime no es puntual.
4. Tom no llega tarde y Jaime no es puntual.
5. Jaime no es puntual y Tom llega tarde.

E. Identificar cada una de las proposiciones moleculares siguientes escribiendo la palabra que denota su forma (por ejemplo, «negación», «conjunción», «disjunción»).

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1. $\neg(Q)$ | 6. $\neg(T)$ |
| 2. (P) & (Q) | 7. (P) \vee (Q) |
| 3. $\neg(R)$ | 8. (R) & (T) |
| 4. (R) \vee (S) | 9. $\neg(S)$ |
| 5. (R) & (S) | 10. (T) \vee (Q) |

F. Examinar las proposiciones siguientes y señalar cada término de enlace que se encuentre en ellas.

1. No es mediodía y el almuerzo no está listo.
2. Si no estamos allí, entonces perderemos nuestro voto.
3. Si dos números no son iguales, entonces uno es mayor que el otro.
4. María se ha ido o no está en su sitio.
5. Si es negro, entonces no reflejará la luz.
6. $x > 0$ o $x = 0$.
7. Si $x + y = z$, entonces $y + x = z$.
8. Si $x + y = 0$ y $x > 0$, entonces $y < 0$.
9. Si $x + y = 0$ y $x = 0$, entonces $y = 0$.
10. O $x = 0$ o $x \neq 0$.

Si..., entonces... Cuando se unen dos proposiciones mediante las palabras «si..., entonces...», la proposición molecular resultante se denomina una *proposición condicional*. Ya se dijo que la manera de escribir el término de enlace «si..., entonces...» da idea de la forma de la proposición condicional. En vez de los puntos se puede poner cualquier proposición. La palabra «si» precede a la primera proposición y la palabra «entonces» precede a la segunda proposición.

Un ejemplo de una proposición condicional es:

Si llueve hoy, entonces se suspende el picnic.

La primera proposición atómica es «Llueve hoy» y la segunda proposición atómica es «Se suspende el picnic». Para poder simbolizar completamente esta proposición condicional emplearemos el símbolo siguiente para el término de enlace:

→.

Ahora ya podemos simbolizar la proposición considerada de la manera siguiente. Primero se escogen letras mayúsculas para las proposiciones atómicas: Sea

P = «Hoy llueve»

Q = «Se suspende el picnic»,

y entonces se sustituye el término de enlace por el símbolo:

(P) → (Q).

Hay algunas denominaciones que se introducen en Lógica para las partes de una proposición condicional. La proposición situada entre la palabra «si» y la palabra «entonces» es el *antecedente*. La proposición que sigue a la palabra «entonces» es el *consecuente*. Estos términos se utilizarán con frecuencia cuando se trabaje con proposiciones condicionales.

EJERCICIO 7

A. Simbolizar las proposiciones siguientes, utilizando los símbolos correspondientes para los términos de enlace. Señalar la proposición atómica representada por cada letra mayúscula.

1. Si hace suficiente frío, entonces el lago se helará.
2. Si las luces están encendidas, entonces la familia Álvarez está en casa.
3. Si dos pulsaciones se atraviesan, continúan conservando la forma original.
4. Si pierde usted el autobús, entonces tendrá que andar.
5. Si usted se dirige hacia el norte, entonces llegará a Canadá mañana.
6. Si es un ácido, entonces contiene el elemento hidrógeno.
7. Si dos y tres son cinco, entonces tres y dos son cinco.
8. Si x es igual a dos, entonces x más uno es igual a tres.
9. Si hoy es siete, entonces el viernes es nueve.
10. Si su producción crece, entonces Juan podrá estabilizar el precio.

B. Examinar las proposiciones condicionales siguientes y señalar en cada una el antecedente.

1. Si Juana es más joven entonces Antonia es más vieja.
2. Si Antonia es más vieja entonces Luisa es más joven.
3. Si Juana es más joven entonces Rosa es más vieja.
4. Si Rosa es más vieja entonces tiene sesenta años.
5. Si Rosa tiene sesenta años entonces Luisa tiene sesenta años.

C. Examinar las proposiciones condicionales siguientes y señalar en cada una el consecuente.

1. Si Pedro es el segundo entonces Juan es el tercero.
2. Si Juan es el tercero entonces precede a Luis.
3. Si Luis es el cuarto entonces Carlos es el quinto.
4. Si Pedro es el segundo entonces está después de Marcos.
5. Si Pedro está después de Marcos entonces Marcos es el primero.

D. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, sustituyendo los términos de enlace por los correspondientes símbolos lógicos.

1. Si (P) entonces (R)
2. Si (S) entonces (T)
3. Si (Q) entonces (P)
4. Si (P) entonces no (S)
5. Si no (S) entonces no (T)

E. Identificar las proposiciones condicionales de entre las proposiciones que siguen, poniendo una C después de cada proposición de esta forma.

1. (P) \vee \neg (Q)
2. (P) \rightarrow \neg (Q)
3. (R) \rightarrow (S)
4. (T) & (S)
5. (T) & \neg (S)
6. (T) \rightarrow (S)
7. (R) \vee (P)
8. (R) \rightarrow (P)
9. (Q) \rightarrow (S)
10. (R) & (T)

● 1.6. Agrupamiento y paréntesis

Hemos visto que es frecuente encontrar proposiciones que tienen más de un término de enlace. Los términos de enlace pueden unir o pueden ser usados con proposiciones moleculares de la misma forma que con las proposiciones atómicas. En todos estos casos uno de los términos de enlace es el mayor. Por esto se le denominará dominante porque es el que actúa sobre toda la proposición.

Recuérdese que uno de los tipos de proposición molecular era de la forma:

$$(\quad) \& (\quad).$$

Esta es una conjunción y los espacios se pueden llenar ya sea con proposiciones atómicas o moleculares. Pero, si se utilizan proposiciones moleculares, éstas a su vez contienen otros términos de enlace; sin embargo, la & se mantiene como término de enlace dominante o mayor. Sea, por ejemplo, la conjunción de dos negaciones, como en la proposición:

Antonio no estudia en la Universidad y Ana no estudia en la Universidad.

Si se designa por T la proposición «Antonio estudia en la Universidad» y por A la proposición «Ana estudia en la Universidad», las proposiciones que se colocarían en los paréntesis de la forma anterior, serían $\neg T$ y $\neg A$, y se escribiría:

$$(\neg T) \& (\neg A).$$

Considérese una conjunción cuyo primer miembro sea a su vez una disjunción y cuyo segundo miembro sea una proposición atómica. El término de enlace «y» enlazará una proposición molecular formada utilizando «o» con una proposición atómica.

A la vez, $x=1$ o $x=2$, y $y=3$.

Sea $P='x=1'$, $Q='x=2'$, y $R='y=3'$; entonces la disjunción es $(P) \vee (Q)$ y la proposición atómica es R. Si estas proposiciones se colocan en los espacios correspondientes de una conjunción, el resultado es:

$$((P) \vee (Q)) \& (R).$$

Esta proposición con tantos paréntesis es difícil de leer. Para mayor facilidad se adopta el siguiente convenio: una proposición que no contenga &, \vee , ni \rightarrow , no necesita colocarse entre paréntesis. En consecuencia, en la proposición anterior se pueden suprimir los paréntesis que encierran la «P» y la «Q», resultando la forma simbólica siguiente:

$$(P \vee Q) \& (R).$$

y puesto que «R» tampoco contiene ni &, ni \vee , ni \rightarrow , la proposición se reduce a:

$$(P \vee Q) \& R.$$

Se puede ver rápidamente que se trata de una conjunción. El término de enlace «y», une dos proposiciones. Una es la proposición atómica R; la otra es una proposición molecular, la disjunción, $P \vee Q$.

Los paréntesis son los símbolos de puntuación de la lógica. Muestran como está agrupada una proposición y, por tanto, señalan cuál es el término de enlace dominante. Un paréntesis que encierre $P \vee Q$, muestra que las partes están ligadas constituyendo una proposición única. La proposición molecular se puede unir a alguna otra por medio de un término de enlace, de manera análoga a como se uniría una proposición atómica.

Obsérvese que en las proposiciones en lengua castellana simbolizadas anteriormente, se logra el mismo objetivo por medio de la coma. Pero, supóngase que la proposición se leyera

$$x=1, \text{ o } x=2 \text{ y } y=3.$$

En este caso la coma expresa que el término de enlace dominante es «o». Como la forma de la disjunción es

$$(\quad) \vee (\quad)$$

se llenarán los espacios con una proposición atómica y una conjunción:

$$(P) \vee (Q \& R).$$

Obsérvese que prescindiendo de los paréntesis, las dos proposiciones simbolizadas se presentarían igual. Por las razones dadas anteriormente no es necesario el paréntesis que encierra la proposición atómica; por tanto, la proposición en la forma final es

$$P \vee (Q \& R).$$

Cuando se simbolizan proposiciones en lengua castellana, se precisa alguna manera de destacar el término de enlace dominante en la proposición. Así como en Lógica el paréntesis señala siempre de manera muy clara cuál es el término de enlace dominante, en las proposiciones escritas en castellano no siempre es tan claro, pues existen diversos métodos para indicar la dominancia. Un método, según se ha visto es el uso de las comas.

El método más claro de poner de manifiesto la dominancia de un término de enlace es usar el término en la forma gramatical más completa, ordinariamente compuesto de dos partes, una de las cuales se escribe al principio de la proposición molecular:

A la vez () y ().

O () o ().

Si () entonces ().

Por ejemplo, considérese la proposición:

- (1) O él está equivocado y yo tengo razón, o quedaré sorprendido.

Poniendo los paréntesis se tiene:

O (él está equivocado y yo tengo razón) o (quedaré sorprendido).

Los paréntesis señalan claramente que las palabras «O» y «o» envuelven la conjunción «él está equivocado y yo tengo razón» que es precisamente

una parte de toda la disjunción. Así la proposición (1) se puede simbolizar:

$$(2) \quad (W \& R) \vee S.$$

Por otra parte, si el paréntesis se coloca de manera que la & quede fuera, entonces ésta dominará y la proposición completa se transforma en una conjunción,

$$(3) \quad W \& (R \vee S).$$

La expresión en castellano sería:

- (4) El está equivocado, y o yo tengo razón o quedaré sorprendido.

Obsérvese la diferente colocación de la palabra «o» en las dos proposiciones (1) y (4). Si «o» se presenta antes de la disjunción domina como en (1) y (2); si se presenta después de la disjunción no domina como en (3) y (4).

Es posible introducir el «a la vez» acompañado al «y». Poniendo paréntesis con el fin de que se vea la forma claramente, la proposición (1) sería:

- (5) O (a la vez él está equivocado y yo tengo razón) o (quedaré sorprendido);

es decir, es claramente una disjunción simbolizada por la fórmula (2). La proposición (4) con paréntesis sería:

- (6) A la vez (él está equivocado) y (o yo tengo razón o quedaré sorprendido),

que es manifiestamente una proposición simbolizada por la fórmula (3).

El escribir reiteradamente el «a la vez» y el «o» iniciales, da lugar a un lenguaje poco elegante, por lo que no se suelen incluir, pero sin duda se pierde en claridad lógica. Cuando se utilizan estos términos, la primera palabra de la proposición indica ya el tipo de proposición lógica de que se trata: «a la vez» indica que es una conjunción formada con «a la vez... y...» como dominante, «o» indica que es una disjunción formada con «o...o...» como dominante, y «si» indica que es una condicional formada con «si..., entonces...» como dominante. Para que la frase en castellano suene mejor se suprimen a veces las palabras «o», «a la vez» y «entonces» y la proposición puede seguir teniendo el mismo significado. Sin embargo, desgraciadamente se suprimen también algunas veces que son necesarias, siendo entonces im-

posible decidir cuál es el verdadero significado de la proposición. Así resultan casos ambiguos como:

- (7) El está equivocado y yo tengo razón o quedaré sorprendido.

No se puede asegurar si (7) es una conjunción o una disjunción.

EJERCICIO 8

Copiar las proposiciones (1), (4), (5), (6) y (7), e intentar en cada una de ellas poner los paréntesis en distintos sitios. No se puede hacer en (1), (4), (5) y (6), pero se puede hacer en (7). Lo que indica que (1), (4), (5) y (6) son claras con un solo significado, mientras que (7) es ambigua por tener más de un significado posible.

Cuando se tienen que traducir proposiciones matemáticas en símbolos lógicos, se pueden utilizar los mismos métodos. Por ejemplo, compárense las proposiciones (8) y (9).

- (8) A la vez x es mayor que 1 o x es menor que 1 y x es menor que 0.
 (9) x es mayor que 1 o a la vez x es menor que 1 y x es menor que 0.

Ambas proposiciones se pueden simbolizar poniendo:

$$\begin{aligned} P &= \text{«}x \text{ es mayor que 1»} \\ Q &= \text{«}x \text{ es menor que 1»} \\ R &= \text{«}x \text{ es menor que 0»} \end{aligned}$$

Sin embargo, (8) se simboliza

$$(10) \quad (P \vee Q) \& R$$

y (9) se simboliza

$$P \vee (Q \& R).$$

Póngase paréntesis en las proposiciones en lenguaje corriente, si son necesarios, para que la forma resulte clara. Obsérvese una vez más que los paréntesis encierran la proposición molecular que *no* tiene el término de enlace dominante. El término de enlace dominante queda *fuera* del paréntesis.

El uso cuidadoso y exacto de los paréntesis en Lógica es muy importante, pues la proposición $(P \vee Q) \& R$ es distinta de la proposición $P \vee (Q \& R)$. Los paréntesis se requieren para indicar cuál es el término de enlace dominante en cada proposición.

EJERCICIO 9

A. Cada una de las proposiciones simbolizadas siguientes es una *conjunción*, por lo que el término de enlace mayor o dominante es «y». Poner los paréntesis adecuadamente para indicar que «y» es dominante.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. $P \vee Q \& S$ | 4. $P \vee R \& Q$ |
| 2. $Q \vee R \& S$ | 5. $R \& P \vee T$ |
| 3. $Q \& R \vee T$ | |

B. Cada una de las proposiciones siguientes es una *disjunción*. Poner los paréntesis adecuadamente para indicar que en este caso el término de enlace dominante es «o».

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. $P \vee Q \& S$ | 4. $P \& Q \vee R$ |
| 2. $Q \vee R \& S$ | 5. $P \vee Q \& R$ |
| 3. $Q \& R \vee T$ | |

C. De cada una de las proposiciones siguientes se dice si es una conjunción o una disjunción. Indicar el agrupamiento adecuado de las proposiciones atómicas poniendo paréntesis que señalen cuál es el término de enlace dominante.

- | | |
|---------------|-----------------|
| 1. disjunción | $S \vee T \& R$ |
| 2. conjunción | $T \vee S \& Q$ |
| 3. conjunción | $T \& S \vee R$ |
| 4. disjunción | $P \vee Q \& T$ |
| 5. disjunción | $P \& Q \vee R$ |

D. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando el agrupamiento por medio de paréntesis cuando sea necesario.

1. O Pedro es presidente y Juan es tesorero, o Jaime es tesorero.

2. Pedro es presidente, y o Juan es tesorero, o Jaime es tesorero.
3. O Ramón es su hermano y Rosa es su hermana o Javier es su hermano.
4. Ramón es su hermano y o Rosa es su hermana o Javier es su hermano.
5. Jorge es el capitán o José es el capitán, y Carlos es el teniente.
6. A la vez el resultado es un número primo o María está equivocada y Rafael está equivocado también.

E. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes, eligiendo letras atómicas para sustituir las proposiciones matemáticas atómicas.

1. Si x es menor que 2, entonces x es igual a 1 o x es igual a 0.
2. Si a la vez x es menor que tres y x es mayor que uno entonces x es igual a dos.
3. $y=4$ y si $x < y$ entonces $x < 5$.
4. O x es mayor que cinco y x es menor que siete o x no es igual a seis.
5. Si $x+3 > 5$ y $y-4 >$ entonces $y > 6$.

F. Simbolizar las cinco proposiciones matemáticas de E utilizando los símbolos lógicos para los términos de enlace y símbolos matemáticos para las proposiciones matemáticas atómicas.

Se considera ahora la proposición

Si este cuadro es negro entonces aquel cuadro es rojo y su rey está sobre el cuadro rojo.

Para simbolizar esta proposición molecular se pone

P = «Este cuadro es negro»
 Q = «Este cuadro es rojo»
 R = «Su rey está sobre el cuadro rojo».

La proposición simbolizada es

$$P \rightarrow (Q \& R).$$

La proposición es una proposición condicional en la que el *consecuente* (la proposición que sigue a «entonces») es una conjunción. El término de dominante es «sí..., entonces...».

¿Cómo se podría cambiar el ejemplo de manera que el término de enlace «y» fuera el dominante? En castellano se puede lograr insertando una coma:

Si este cuadro es negro entonces aquel cuadro es rojo,
y su rey está sobre el cuadro rojo.

Se puede, si se desea, evitar la coma utilizando la palabra «a la vez» como parte del término de enlace dominante.

A la vez si este cuadro es negro entonces aquel cuadro es rojo y su rey está sobre el cuadro rojo.

Para señalar que $\&$ es el término de enlace en la proposición simbolizada, se cambia la posición del paréntesis,

$$(P \rightarrow Q) \& R.$$

EJERCICIO 10

A. Junto a cada proposición molecular escrita a continuación, se ha puesto el nombre del tipo de proposición molecular a la que pertenece. Añadir los paréntesis necesarios.

1. condicional	$P \rightarrow R \& S$
2. condicional	$P \rightarrow Q \vee R$
3. condicional	$P \& Q \rightarrow R$
4. condicional	$R \vee P \rightarrow Q$
5. conjunción	$P \rightarrow Q \& S$
6. conjunción	$R \& P \rightarrow Q$
7. disjunción	$R \vee Q \rightarrow T$
8. disjunción	$Q \rightarrow P \vee S$
9. disjunción	$P \rightarrow R \vee Q$
10. condicional	$P \rightarrow R \vee Q$
11. conjunción	$P \& Q \rightarrow T$
12. condicional	$P \& Q \rightarrow T$
13. disjunción	$P \vee T \rightarrow Q$
14. disjunción	$Q \rightarrow R \vee \neg S$
15. condicional	$Q \rightarrow R \vee \neg S$

B. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando el agrupamiento por paréntesis si es necesario. Para todas las proposiciones, sea

J = «Juan está en la clase 1»
 C = «El está en la clase de Química»
 K = «Álvaro está en la clase 3».

1. Si Juan está en la clase 1, entonces Álvaro está en la clase 3 y él está en la clase de Química.
2. Si o Álvaro está en la clase 3 o él está en la clase de Química, entonces Juan está en la clase 1.
3. O si Juan está en la clase 1 entonces él está en la clase de Química, o Juan no está en la clase 1.
4. O Álvaro está en la clase 3 o si Jaime está en la clase 1 entonces él está en la clase de Química.
5. A la vez si Álvaro está en la clase 3, entonces él está en la clase de Química, y Juan no está en la clase 1.

La negación de una proposición molecular. Hay casos en los que se desea expresar la negación de una proposición molecular entera. Por ejemplo, se trata de negar una disjunción como en el caso siguiente:

No ocurre que el libro o es rojo o es verde.

Supóngase que se simboliza esta proposición poniendo primero P para designar la primera proposición atómica y Q para designar la segunda proposición atómica. La disjunción es entonces $P \vee Q$. Luego, la forma simbolizada de la negación de una proposición es:

$$\neg(P \vee Q).$$

Obsérvese el símbolo que denota la negación. Recuérdese que se puede negar cualquier proposición, ya sea atómica o molecular. Cualquier proposición se puede negar poniéndola primero entre paréntesis y luego colocando el símbolo de negación delante del paréntesis. Al simbolizar una proposición se debe tener en cuenta que el símbolo para la negación se aplica a la proposición completa más corta delante de la que está colocado.

Así, para negar la proposición $P \vee Q$, se pone entre paréntesis con un símbolo de negación delante del paréntesis.

$$\neg(P \vee Q).$$

El agrupamiento entre paréntesis indica: (1) que la negación se refiere a toda la proposición (en este caso una disjunción) —no sólo a la proposición atómica más próxima—, y (2) que la negación es el término de enlace dominante. En este caso el término de enlace «no» domina al término de enlace «o».

Se pueden encontrar ejemplos en los que se niegan otro tipo de proposiciones moleculares. Repetimos que también son necesarios paréntesis para

indicar que lo que se niega es la proposición molecular completa y no sólo una parte de ella. Considérese la proposición

No ocurre que a la vez Juan tenga una hermana y el tenga un hermano.

Aquí se quiere negar la proposición completa. Es decir, se desea manifestar que Juan no tiene a la vez un hermano y una hermana. Al simbolizar esta proposición, si se designa por P la primera proposición atómica y por Q la segunda proposición atómica, se tiene:

$$\neg(P \& Q).$$

Finalmente, se considera la negación de una condicional,

No ocurre que si usted ve un gato negro entonces tendrá mala suerte.

Sea

P — «Usted ve un gato negro»

Q — «Usted tendrá mala suerte».

Simbolizado, este ejemplo se escribirá:

$$\neg(P \supset Q).$$

El agrupamiento entre paréntesis manifiesta claramente que lo que se ha negado es la proposición condicional completa y no simplemente el antecedente, proposición P .

Quizá la explicación más simple para el agrupamiento y el uso de los paréntesis en Lógica es que una proposición molecular encerrada entre paréntesis se presenta como una proposición atómica respecto a otros términos de enlace o a otras proposiciones con las que puede ligarse. Se trata como una proposición única. El término de enlace dominante está fuera del paréntesis.

EJERCICIO II

A. En cada una de las proposiciones siguientes uno de los símbolos \vee , \rightarrow , o $\&$ domina. Por tanto, las proposiciones son disyunciones, condicionales, y conjunciones a pesar de empezar por una negación. Supóngase que se subjeta entendido que las negaciones iniciales dominan, convirtiendo todas las proposiciones en negaciones. Sin ningún cambio más que la adición de

paréntesis, convertir cada proposición en una negación.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $\neg P \vee R$ | 4. $\neg P \rightarrow Q$ |
| 2. $\neg R \rightarrow S$ | 5. $\neg R \vee S$ |
| 3. $\neg P \& T$ | 6. $\neg\neg Q \& \neg S$ |

B. Dar la negación de cada una de las proposiciones siguientes añadiendo símbolos de negación, y paréntesis si es necesario.

- | | |
|----------------------|--------------------------------|
| 1. S | 7. $T \rightarrow \neg S$ |
| 2. $P \vee T$ | 8. $\neg N \vee M$ |
| 3. $S \& \neg T$ | 9. $\neg Q \rightarrow \neg T$ |
| 4. $P \rightarrow R$ | 10. $\neg S \& P$ |
| 5. $Q \& R$ | 11. $P \vee \neg S$ |
| 6. $\neg R$ | 12. $\neg Q$ |

C. Junto a cada una de las proposiciones que siguen, se da el nombre del tipo de proposición molecular a la que pertenece. Añadir los paréntesis necesarios.

- | | |
|----------------|-----------------------------|
| 1. negación | $\neg P \rightarrow R$ |
| 2. condicional | $\neg P \rightarrow R$ |
| 3. conjunción | $\neg P \& \neg R$ |
| 4. negación | $\neg R \& T$ |
| 5. condicional | $\neg P \rightarrow \neg Q$ |
| 6. negación | $\neg P \rightarrow \neg Q$ |
| 7. disjunción | $\neg Q \vee \neg R$ |
| 8. negación | $\neg T \vee S$ |
| 9. conjunción | $\neg S \& \neg Q$ |
| 10. negación | $\neg R \rightarrow S$ |

D. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando el agrupamiento por medio de paréntesis.

Sea

P = «Es jueves»

Q = «Sucedió en lunes».

1. O no es jueves o no sucedió en lunes.
2. Si no ocurre que sucedió en lunes, entonces es jueves.
3. No ocurre que o es jueves o que sucedió en lunes.
4. No sucedió en lunes y es jueves.
5. No ocurre que a la vez es jueves y que sucedió en lunes.

6. Si no sucedió en lunes entonces no es jueves.
7. No ocurre que si es jueves entonces sucedió en lunes.
8. O no es jueves o sucedió en lunes.
9. No es jueves y sucedió en lunes.
10. No ocurre que a la vez sucedió en lunes y es jueves.

E. Simbolizar las proposiciones siguientes tal como indica el ejemplo a continuación.

1. O Juan es el más pequeño y Pedro es el más alto o Pedro es el más bajo y Juan es el más grande.

Ejemplo: Sea P = «Juan es el más pequeño»

Q = «Pedro es el más alto»

R = «Pedro es el más bajo»

S = «Juan es el más grande»

$(P \& Q) \vee (R \& S)$.

2. Si una sustancia orgánica se descompone, sus componentes se transforman en abono y fertilizan el suelo.
3. O yo estoy equivocado, o la pregunta número uno es cierta y la pregunta número dos es falsa.
4. A la vez yo estoy equivocado o la pregunta número uno es cierta, y la pregunta número dos es falsa.
5. O yo estoy equivocado y la pregunta número uno es cierta o la pregunta número dos es falsa.
6. No ocurre que, a la vez Juana sea su hermana y Rosa sea su hermana.
7. Juana no es su hermana y Rosa es su hermana.
8. Si se conoce el período del movimiento de la Luna y se sabe la distancia de la Tierra a la Luna, entonces se puede calcular la aceleración centrípeta de la Luna.
9. O sus deberes están terminados, o si no están terminados tendrá que hacerlos por la noche.
10. No todas las regiones de África tienen un clima cálido y húmedo y no toda el África ecuatorial es una tierra de vegetación espesa y exuberante.
11. Si son las diez entonces la sesión de la Asamblea General ha empezado, y ahora el reloj señala las diez.
12. No ocurre que, o estrellas muy lejanas presentan paralaje o aparecen en el telescopio como discos.

13. Si este mineral no es duro, entonces no está compuesto de cristales de cuarzo.
14. Si es después de las cinco, entonces la puerta está cerrada y yo no tengo la llave.
15. Si es después de las cinco entonces la puerta está cerrada y además, yo no tengo la llave.

F. En cada una de las proposiciones matemáticas siguientes se indica el tipo de proposición molecular que debe entenderse. Poner los paréntesis necesarios.

1. condicional	$x=0 \vee x=1 \rightarrow y=2$
2. disjunción	$x=0 \vee x \neq 0 \& y=z$
3. conjunción	$x=1 \vee x \neq 1 \& y \neq 3$
4. condicional	$x=y \rightarrow y \neq z \& y > 5$
5. conjunción	$x=y \vee x=z \& y > 3$
6. condicional	$x=y \& y=z \rightarrow x=z$
7. condicional	$x > y \& y > z \rightarrow x > z$

• 1.7 Eliminación de algunas paréntesis

Adoptando algunas reglas simples acerca de la potencia de los términos de enlace, se pueden eliminar algunos de los paréntesis en las proposiciones simbolizadas:

• REGLA 1

El \rightarrow es más potente que los otros términos de enlace.

Utilizando la regla 1, en vez de

$$(P \& Q) \rightarrow R$$

se puede escribir simplemente

$$P \& Q \rightarrow R$$

También, en vez de

$$P \rightarrow (Q \vee R)$$

se puede escribir

$$P \rightarrow Q \vee R.$$

Por otra parte, si se tiene

$$(P \rightarrow Q) \vee R,$$

no se puede eliminar el paréntesis, pues es necesario para indicar que \vee es el término de enlace dominante. También, si una proposición tiene dos condicionales, se tiene que utilizar el paréntesis para indicar cuál es dominante. Así, la proposición

$$A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

tiene significado distinto de

$$(A \rightarrow B) \rightarrow C.$$

La segunda regla es tan natural que se ha hecho uso de ella sin haberla enunciado explícitamente.

• REGLA 2

El signo de negación \neg es más débil que cualquiera de los otros tres términos de enlace.

Utilizando la regla 2, en vez de

$$(\neg P) \& Q$$

se escribe

$$\neg P \& Q,$$

o, en vez de

$$P \vee (\neg Q)$$

se escribe

$$P \vee \neg Q,$$

o, en vez de

$$(\neg P) \rightarrow (\neg Q)$$

se puede escribir:

$$\neg P \rightarrow \neg Q.$$

Pero el paréntesis es necesario en

$$\neg(P \& Q).$$

Finalmente, puesto que $\&$ y \vee son igualmente fuertes, cuando se presentan ambos en una proposición se tienen que poner siempre los paréntesis para indicar cuál es el término de enlace dominante. Así, el significado de:

$$P \vee Q \& R$$

no es claro; pues

$$(P \vee Q) \& R$$

es una conjunción, y

$$P \vee (Q \& R)$$

es una disjunción.

EJERCICIO 12

A. Junto a cada una de las proposiciones siguientes se indica el tipo de proposición molecular a la que pertenece. Utilizando las reglas de prioridad establecidas sobre la potencia de los símbolos, añadir los paréntesis *sólo* donde sean necesarios.

1. condicional	$P \rightarrow Q \vee R$
2. disjunción	$P \vee Q \& R$
3. conjunción	$R \rightarrow S \& T$
4. negación	$\neg R \& S$
5. condicional	$P \vee Q \rightarrow \neg R$
6. negación	$\neg P \rightarrow Q$
7. conjunción	$A \& B \rightarrow C$
8. disjunción	$M \rightarrow N \vee P$
9. negación	$\neg P \vee \neg Q$
10. conjunción	$\neg A \vee \neg B \& \neg C$

B. Junto a cada una de las proposiciones matemáticas siguientes se indica el tipo de proposición molecular al que pertenecen. Utilizando las reglas de prioridad establecidas sobre la potencia de los símbolos, añadir los paréntesis *sólo* donde sean necesarios.

1. conjunción	$x \neq 0 \vee x > y \& y = z$
2. condicional	$x = 0 \rightarrow x > y \& y \neq z$
3. disjunción	$x = 0 \vee x \neq 0 \& y = z$
4. condicional	$x > y \& y > z \rightarrow x > z$
5. disjunción	$x = 0 \vee x > 0 \rightarrow y = 0$
6. conjunción	$x = y \& y = z \vee x = z$
7. condicional	$x = y \& y = z \rightarrow x = z$
8. conjunción	$x = y \vee x = z \& y \neq z$

C. Simbolizar las proposiciones del Ejercicio 11, Sección E, utilizando paréntesis *sólo* donde sean necesarios.

• 1.E Resumen

Para poder simbolizar proposiciones en Lógica es preciso saber distinguir las partes lógicas de estas proposiciones. Una proposición molecular está formada por una proposición atómica más un término de enlace, por lo menos. Una proposición atómica es aquella que no posee ningún término de enlace. «Términos de enlace de proposiciones» (o simplemente «términos de enlace») es el nombre que en Lógica se da a términos tales como «a la vez... y...», «o... o...», «si... entonces...» y «no» que se utilizan para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

De los cuatro términos de enlace indicados, «y», «o», y «si... entonces...» ligan o actúan sobre dos proposiciones a la vez, mientras que el término de enlace «no» actúa sólo sobre una. Una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «y» es una «conjunción», una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «o» es una «disjunción», una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «no» es una «negación», y una proposición molecular formada utilizando el término de enlace «si... entonces...» es una proposición «condicional».

Es conveniente en Lógica utilizar unos símbolos para proposiciones y otros para términos de enlace. Para proposiciones atómicas se usan letras mayúsculas tales como «P», «Q», «R», «S», y así sucesivamente. Puesto que los términos de enlace determinan la forma de una proposición en Lógica, se puede sustituir cada proposición atómica por otra cualquiera y la forma se conserva. Por ejemplo, en la proposición $P \& Q$ se pueden sustituir P y Q por proposiciones escritas cualesquiera. Los símbolos utilizados para los términos de enlace, por otra parte, permanecen siempre los mismos, y son: $\&$ para conjunción, \vee para disjunción, \neg para negación, y \rightarrow para la condición.

En proposiciones que tiene más de un término de enlace es preciso indicar la manera de agruparse, pues distintas agrupaciones pueden tener distintos significados. En lengua castellana, las agrupaciones se presentan de acuerdo con la colocación de ciertas palabras, o mediante la puntuación. En Lógica la agrupación se expresa por paréntesis. La conjunción $(P \vee Q) \& R$ tiene distinto significado que la disjunción $P \vee (Q \& R)$, a pesar de tener las mismas proposiciones atómicas y los mismos términos de enlace. Se accionan los paréntesis para indicar cuándo un término de enlace corrige la proposición, si no es el término de enlace más fuerte en la proposición. «No» es el más débil; después siguen «y» y «o» que tienen la misma potencia; y «si... entonces...» es el más fuerte. Sin embargo, cada término de enlace puede dominar, si lo indica el paréntesis.

Con estos símbolos como instrumentos estamos ahora preparados para expresar de manera clara y precisa el significado de las proposiciones, salvo algunas, que se presentan dentro de la parte de la Lógica formal elemental conocida por Lógica proposicional.

EJERCICIO 13

Ejercicios de repaso

A. Poner una «A» después de cada proposición atómica y una «M» después de cada proposición molecular. Después de cada proposición molecular escribir el término de enlace utilizado en aquella proposición.

1. El tiempo atmosférico es la situación de la atmósfera en un momento particular y el clima es la variación de la situación del tiempo atmosférico en un período largo de tiempo.
2. Las bacterias en el agua o se destruyen hirviéndola o se destruyen por clorización.
3. Este libro tiene más páginas que aquel otro.
4. Si la sentencia es cierta, entonces E aplicará el caso.
5. Él reconoció la obra como de un poeta inglés del siglo diecinueve.
6. La guerra no puede explicarse totalmente por una causa.
7. Un elemento tiene propiedades físicas y tiene propiedades químicas.
8. Somos capaces de hacer todos los ejercicios de esta página.
9. No somos capaces de hacer todos los ejercicios de esta página.
10. Si dos o más elementos se unen químicamente para formar una nueva sustancia, entonces el producto se denomina un compuesto.
11. Las proposiciones moleculares contienen términos de enlace.
12. Este problema no es correcto.
13. Rosa es menor de edad y su hermano es mayor de edad.
14. No se puede terminar el reportaje hoy.
15. Necesitamos ayuda o tendremos dos días en completar el reportaje.

B. Escribir cuatro proposiciones que tengan términos de enlace. Utilizar *distinto* término de enlace en cada una de ellas.

C. Escribir cuatro proposiciones atómicas.

D. Simbolizar las proposiciones siguientes, indicando cuál es la proposición atómica simbolizada por cada una de las letras mayúsculas.

1. Si son más de las seis, entonces la asamblea ha empezado.
2. O mi reloj va mal o llegaremos tarde.
3. Si las células de la planta no tienen clorofila, entonces no pueden sintetizar los alimentos.
4. La piedra atélica se produce por medio de capas de arena endurecida y la piedra caliza se produce por las conchas de pequeños animales en el mar.

3. Si la tribu fuera nómada, entonces no construiría chozas permanentes.

E. Simbolizar las proposiciones siguientes, utilizando los siguientes símbolos para las proposiciones atómicas:

P = «Luis ha venido demasiado tarde»

Q = «Juan ha venido demasiado pronto»

R = «El Sr. Pérez está enfadado»

1. Si Luis ha venido demasiado tarde y Juan demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
2. Si o Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
3. Si Luis ha venido demasiado tarde y Juan no ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado.
4. Si el Sr. Pérez está enfadado, entonces Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
5. El Sr. Pérez está enfadado, y Luis ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto.
6. Si el Sr. Pérez no está enfadado, entonces Luis no ha venido demasiado tarde.
7. O Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
8. Si Juan no ha venido demasiado pronto o Luis ha venido demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
9. El Sr. Pérez está enfadado y o Luis ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
10. Juan ha venido demasiado pronto, y si Luis ha venido demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
11. No ocurre que, Luis ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto.
12. Si Luis no ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado.

F. Completar la traducción de las siguientes proposiciones moleculares en símbolos lógicos, sustituyendo las palabras que corresponden a los términos de enlace por sus correspondientes símbolos.

1. Si P entonces Q

2. $O P$ o Q

3. Si o P o Q entonces no R

4. O no P o no Q

5. $O P \text{ y } Q \text{ o } R \text{ y } S$
 6. No ocurre que, a la vez $P \text{ y } Q$
 7. No ocurre que o $P \text{ o } Q$
 8. Si no P entonces no $Q \text{ y } R$
 9. No ocurre que, si P entonces Q
 10. No ocurre que, a la vez $P \text{ y no } P$
 11. $P \text{ y o } Q \text{ o } R$
 12. $O P \text{ y } Q \text{ o } R$
 13. $P \text{ y si } Q, \text{ entonces no } R$

G. Aparear cada una de las palabras de la izquierda con los ejemplos o definiciones en la lista de la derecha.

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. disjunción | (a) $P \rightarrow Q$ |
| 2. negación | (b) $\neg(P \& Q)$ |
| 3. proposición condicional | (c) $P \vee Q$ |
| 4. proposición molecular | (d) Q en la proposición $P \rightarrow Q$ |
| 5. antecedente | (e) $\neg P$ |
| 6. consecuente | (f) P en la proposición $P \rightarrow Q$ |
| 7. conjunción | (g) $P \& Q$ |
| 8. proposición atómica | (h) $\neg P \vee \neg Q$ |
| | (i) Cualquier proposición con un término de enlace |
| | (j) Cualquier proposición sin términos de enlace |

H. Simbolizar las siguientes proposiciones matemáticas eligiendo letras mayúsculas para sustituir las proposiciones matemáticas atómicas e indicar la proposición atómica a la que sustituye cada una.

- x es mayor que cinco.
- Cuatro no es un número impar.
- x es igual a tres o x es mayor que seis.
- No ocurre que si x es un número impar entonces x es divisible por dos.
- Si x más cuatro es siete e y más x es ocho entonces y es cinco.
- Si x es menor que cinco o mayor que siete entonces no es igual a seis.

I. Simbolizar las proposiciones matemáticas (3), (5) y (6) de H utilizando los símbolos lógicos para los términos de enlace y los símbolos matemáticos típicos para las proposiciones atómicas.

J. Traducir las siguientes proposiciones lógicas (fórmulas) en lengua caste-

llana. Primero elegir una proposición atómica en castellano para cada letra atómica, y luego escribir la proposición completa en castellano.

- $\neg S$
- $P \vee \neg Q$
- $\neg(R \rightarrow S)$
- $x < 5 \rightarrow \neg(x > 6)$
- $x + 3 < 5 \ \& \ \neg(x = 0) \rightarrow x = 1$
- $P \& \neg Q \rightarrow R$

Examen de repaso

I. Simbolización del lenguaje cotidiano

Simbolizar las proposiciones siguientes, diciendo claramente lo que representan las letras mayúsculas elegidas como símbolos. Para las proposiciones matemáticas utilizar los símbolos matemáticos típicos.

- Si el libro cuesta más de diez pesetas, entonces Juan no podrá comprarlo.
- O ésta es la casa de Anuncio o la dirección que nos han dado no es correcta.
- Se ha levantado aire y ha refrescado.
- Si x es menor que tres, entonces es menor que cuatro.
- Si x no es igual a cinco, entonces o es mayor que cinco o es menor que cinco.

II. Simbolización con símbolos dados

Utilizando los símbolos dados, simbolizar las proposiciones siguientes. (No es necesario escribir las proposiciones en castellano.)

Sea

P = «Juan ha venido demasiado pronto»

Q = «María ha venido demasiado tarde»

R = «El Sr. Pérez está enfadado»

- Si Juan ha venido demasiado pronto o María demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.
- Si María ha venido demasiado tarde, entonces Juan no ha venido demasiado pronto.
- O el Sr. Pérez está enfadado o María no ha venido demasiado tarde.

- d. María ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto, y el Sr. Pérez está enfadado.
- e. Si el Sr. Pérez no está enfadado, entonces Juan no ha venido demasiado pronto y María no ha venido demasiado tarde.
- f. O María no ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto.
- g. Si María no ha venido demasiado tarde y Juan no ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado.

I. Definiciones

Completar las proposiciones siguientes eligiendo de entre las palabras escritas final la que está definida por la proposición dada.

- a. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «y» es una
- b. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «no» es una
- c. La combinación de una o más proposiciones atómicas con un término de enlace de proposiciones se denomina
- d. En Lógica, una proposición completa que no tiene término de enlace se denomina
- e. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «si... entonces...» se denomina una
- f. La proposición situada antes del término de enlace en una proposición condicional se denomina
- g. La proposición situada después del término de enlace en una proposición condicional se denomina
- h. La proposición molecular que utiliza el término de enlace «o» es una

antecedente	conjunción
atómica	consecuente
proposición molecular	disyunción
condicional	negación

I. Uso del paréntesis

Algunas de las proposiciones siguientes son necesarias paréntesis para que respondan a las proposiciones moleculares indicadas en la izquierda. Poner paréntesis en los lugares correspondientes cuando sean necesarios.

- a. conjunción $P \vee Q \& R$
- b. negación $\neg P \& Q$

c. conjunción	$\neg P \& Q$
d. condicional	$P \& Q \rightarrow R$
e. negación	$\neg P \vee \neg R$
f. disyunción	$P \rightarrow Q \vee R$
g. condicional	$\neg P \rightarrow \neg R$
h. disyunción	$P \vee Q \& R$
i. negación	$\neg P \rightarrow Q$
j. conjunción	$P \& Q \rightarrow R$

V. Simbolización de proposiciones con paréntesis

Señalar el término de enlace dominante en las proposiciones siguientes. Indicar después cómo sería la proposición en símbolos lógicos y añadir los paréntesis donde sean necesarios.

- a. No ocurre que, o Jaime es el más alto o Juan es el más alto.
- b. Tomás no es nuestro representante y José no es nuestro capitán.
- c. O «beta» está antes que «gamma» y «eta» está antes que «theta» o yo no sé griego.
- d. Antonio se marcha ahora y o yo iré con él o Pedro irá con él.
- e. Si el baile empieza a las seis, entonces nosotros llegaremos pronto y Pilar llegará tarde.

**Profesor Emèrito de Filosofia:
Patrick Suppes**

