Vorlesungsmitschrift
Strömungslehre und Wärmeübertragung

SS 2003

1. Allgemeines

Definition Fluide

Deformation durch Krafteinwirkung permanent

Bsp.: Atmosphärenluft
Polymerlösung
Knete

In dieser Vorlesung

Kontinua einkomponentige
Einphasige

Flüssigkeiten
Newton'sche Fl.

2. Kontinuum

Modell für Eigenschaft der Fluide

System aus Teilchen ohne Ausdehnung und Zwischenräume

[Bild]

im Kontinuum ist die Grenzwertbildung $\Delta V \rightarrow 0$ möglich

Dichte der Substanz

im System: $\rho = \frac{m}{V}\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

im Untersystem: $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

insbesondere: $\Delta V=0 \rightarrow \Delta m \rightarrow 0$

und für $\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ existiert und heißt ρ

3. Mechanik

→Wirkung von Kräften

→Spannungen $\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A}$

→im Kontinuum

[Bild]

→Grenzübergang $\Delta O \rightarrow 0$

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta O \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Spannungen durch Oberflächenkräfte

hingegen: Volumenkräfte werden dem Körper aufgrund seiner Ausdehnung zugeordnet → z. B. $\vec{\sigma} = m \cdot \vec{g}$

im Kontinuum: Kraftvektor

$$\vec{f}^{\,b} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta m}$$

→Stoffeigenschaften von Fluiden

aus Fluiddefinition folgt:

Fluid kann in Ruhe keine Schubspannungen aufnehmen

[Bild]

→Unterschiede

Flüssigkeiten → intermolekulare Kräfte

Gase → keine intermolekularen Kräfte

→Eigenschaften durch Teilchen-Teilchen Wechselwirkungen

Viskosität

[Bild]

für Bewertung mit u benötigt man eine Kraft

$$\tau = \frac{F}{A} = f(u,d) = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

μ ... dynamische Zähigkeit

υ ... kinematische Zähigkeit

$$\rightarrow = \frac{\mu}{\rho}$$

$\mu \downarrow$ bei $T \uparrow$ ... (für Flüssigkeiten)

$\mu \uparrow$ bei $T \uparrow$ ... (für Gase)

→Oberflächenspannung

Grenzflächen: z.B. Flüssigkeit→Gas

[Bild]

eigentlich: $\sigma = \frac{W_{FO}}{A}\left[\frac{Nm}{m^2}\right] = \left[\frac{N}{m}\right]$

4. Kinematik des Kontinuums

[Bild]

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}_0, t_0 = 0) = \vec{\xi}(\vec{x}_1, t_1) = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$$

Teilchenbahn:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$$

$$\vec{v}(\vec{\xi}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt}\bigg|\vec{\xi} = const.$$

→ DGl für Teilchenbahn

$$d\vec{x} = \vec{v} \cdot dt; \vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Bahnlinie:

Tangentialkurve zu Geschwindigkeitsvektoren eines materiellen Punktes zu verschiedenen Zeiten

Stromlinien:

Tangentialkurven zu den Geschwindigkeitsvektoren verschiedener Teilchen zu einem Zeitpunkt

[Bild]

→ DGl der Stromlinie

$\vec{v} \times d\vec{x} = 0$

$\rho = \rho(\vec{\xi}, t)$ ... materielle Beschreibung... Langrange'sche Betrachtung (Bahnlinie)

$\xi = \xi(\vec{x}, t) \rightarrow \rho = \rho(\vec{x}, t)$ ... Feldbeschreibung ... Euler'sche Betrachtung (Stromlinie)

5. Kinetik

1. Masse kann weder erzeugt noch verloren gehen
2. Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der Summe der an ihm angreifenden Kräfte

3. Die zeitliche Änderung der $\sum(innereEnergie + technischerEnergie)$ ist gleich der Summe der am Körper wirkenden Kräfte + zugeführter Wärmeleistung

6. Kontrollvolumina

verschiedene Möglichkeiten

a. Das differentielle Kontrollvolumen

[Bild]

b. raumfestes, endlich großes Kontrollvolumen

V=const.

offenes System → Fluß über die Grenzen

[Bild]

c. bewegtes, endlich großes Kontrollvolumen

V=V(t)

immer dieselben Massenpunkte im Kontrollvolumen

geschlossenes System

„Kartoffelsack in einer Menge von Kartoffeln → immer dieselben Kartoffeln im Sack, dieser ändert kann aber sein/e Volumen/Form ändern

[Bild]

7. Reynolds'sches Transporttheorem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{V(t)} \Psi(\vec{\xi},t)dV\right] = ?$$

[Bild]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \Psi(\vec{\xi},t)dV = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\int_{V(t)} \Psi(\vec{\xi},t+\Delta t)dV - \int_{V(t)}\Psi(\vec{\xi},t)dV}{\Delta t}\right]$$

Addition []: $\int_{V(t)}\Psi(\vec{\xi},t+\Delta t)dV - \int_{V(t)}\Psi(\vec{\xi},t+\Delta t)dV = 0$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\int_{V(t)} \Psi(\vec{\xi},t+\Delta t)dV - \int_{V(t)}\Psi(\vec{\xi},t)dV}{\Delta t}\right]}_{\substack{Integrand\_unterschiedlich \\ Grenzen\_gleich(*)}} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\int_{V(t+\Delta t)} \Psi(\vec{\xi},t+\Delta t)dV - \int_{V(t)}\Psi(\vec{\xi},t)dV}{\Delta t}\right]}_{\substack{Integrand\_gleich \\ Grenzen\_unterschiedlich(**)}}$$

$$* := \int_{V(t)} \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Psi(\vec{\xi},t+\Delta t) - \Psi(\vec{\xi},t)}{\Delta t}\right]dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \Psi(\vec{\xi},t)}{\partial t}dV$$

$$V(t+\Delta t) - V(t) = \partial V = v_{normal}\Delta t dO$$

$$= \underbrace{\vec{v}\vec{n}\Delta t}_{\substack{Verschiebung\_der \\ Oberflaeche\_in\_\vec{n} \\ Richtung}} \quad \underbrace{dO}_{Oberflaechenelement}$$

[Bild]

$$** := \lim_{\Delta t \to 0}\int \Psi(\vec{\xi},t+\Delta t)dV = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\int_O \psi(\vec{\xi},t+\Delta t)\vec{v}\vec{n}\Delta t dO}{\Delta t} = \oint \psi(\xi,t)(\vec{v}\vec{n})dO$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int \psi dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int\limits_{O} \psi(\vec{v}\vec{n}) dO}$$

$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{V} \psi dV\right]$ ... Gesamtänderung von $\int\limits_{V} \psi dV$ mit der Zeit

$\int \frac{\partial \psi}{\partial t} dV$ ... reinzeitliche Änderung von ψ aller MP mit einem momentan deckungsgleichen, raumfesten KV

$\int\limits_{O} \psi(\vec{v}\vec{n}) dO$ ... Änderung von ψ aufgrund des „Flusses" der MP über die Grenzen des momentan deckungsgleichen, raumfesten KV

Deformation von Fluidteilchen

[Bild] Streckung

[Bild] Scherung

Quantifizierung der Deformation von Fluidteilchen

[Bild]

Geschwindigkeiten

bei A: u, v

bei C: $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$

bei B: $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

* ... $(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) dt$

** ... $(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt$

Betrachte Linie $\overline{AC}$:

zur Zeit $t = t$ von A nach C

zur Zeit $t = t + dt$ von A' nach C'

Verformung der Linie:

durch Streckung

in x-Richtung: um $\frac{\partial u}{\partial x} dxdt$

in y-Richtung: um $\frac{\partial v}{\partial t} dxdt$

durch Drehung

$$\tan(d\gamma_1) = \frac{\frac{\partial v}{\partial t} dxdt}{dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} dxdt}_{\underset{\to 0}{klein\_2.Ordnung}}}$$

ferner für $\alpha <<\to \tan\alpha \cong \alpha$

$$\Rightarrow d\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma_1}{dt} = \dot{\gamma}_1 = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Punkt B mitbetrachten

[Bild]

Verformung von $\overline{AB}$:

Streckung

in x-Richtung: um $\frac{\partial u}{\partial y} dydt$

in y-Richtung: um $\frac{\partial v}{\partial y} dydt$

Drehung

$$\tan(-d\gamma_2) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dydt}{dy + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y} dydt}_{klein\_2.Ordnung}} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \approx -d\gamma_2$$

$$\Rightarrow -\gamma_2 = -\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Definiere zur Beschreibung von Drehungen in Strömungen

„Rotation" als: $\omega = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$

aufgrund dieser „Rotation" können Strömungsfelder klassifiziert werden

drehungsfreie Strömungen

$\omega = 0$

1. Fall: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

[Bild]

2. Fall: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

$d\gamma_1 = -d\gamma_2$

[Bild]

Bemerkung

bei 3d-Strömungen ist Drehung („Rotation"):

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}; \ \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

dann $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$; $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Grundgleichungen der Strömungslehre und Wärmeübertragung

1. Kontinuitätsgleichung

Axiom: Masse kann weder erzeugt noch vernichtet werden

Herleitung am raumfesten KV:

[Bild]

Massenbilanz:

Massenänderung im inneren des KV ist $\int\limits_{V_i} \frac{d\rho}{dt} dV_i$

sie wird offenbar bewirkt durch Summe aller zu und abfließenden Massen

zufließender Massenstrom ist $\vec{v}\vec{n}\rho dO$

$\Rightarrow$ Gesamtfluß von Masse über die Oberfläche des KV ist

$$\int\limits_O \rho(\vec{v}\vec{n})dO$$

$$\left(\vec{v}\vec{n} = |\vec{v}|\underbrace{|\vec{n}|}_{=1}\cos\varphi; \varphi = \angle(\vec{v},\vec{n})\right)$$

formuliere Bilanz:

$$\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = -\int\limits_O \rho\vec{v}\vec{n}dO$$

„Zeitliche Änderung der Masse im KV = Massenzufluß - Massenabfluß“

Herleitung für differentielle KV:

[Bild] $\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} <<$

[Bild]

$$\int \frac{\partial\rho}{\partial t} dV \rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y$$

$$-\int\limits_O \rho(\vec{v},\vec{n})dO = -\left(\rho v|_{y+\Delta y} - \rho v|_y\right)\Delta x - \left(\rho u|_{x+\Delta x} - \rho u|_x\right)\Delta y$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y + \left(\rho v|_{y+\Delta y} - \rho v|_y\right)\Delta x + \left(\rho u|_{x+\Delta x} - \rho u|_x\right)\Delta y \Big| : \Delta x\Delta y$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\left(\rho v|_{y+\Delta y} - \rho v|_y\right)}{\Delta y} + \frac{\left(\rho u|_{x+\Delta x} - \rho u|_x\right)}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\rho}_{\frac{\partial\rho}{\partial t}} + \rho(\vec{\nabla}\vec{v}) = 0$$

$$\rho = const.: div(\vec{v}) = 0$$

endlich großes, bewegtes KV

[Bild]

$$m = \int\limits_{V(t_1)} \rho dV = \int\limits_{V(t_2)} \rho dV$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V(t)} \rho dV = 0 \rightarrow$$ Reynolds'sches Transporttheorem $\rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V(t)} \rho dV = \int\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_{O} \rho(\vec{v}, \vec{n}) dO = 0$$

integrale Darstellung der Kontinuitätsgleichung für raumfestes und bewegtes KV äquivalent!

Gausz'scher Integralsatz

$$\int\limits_{O} \vec{A}\vec{n} dO = \int\limits_{V} \vec{\nabla}\vec{A} dV \overset{anwenden}{\rightarrow}$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_{O} \rho(\vec{v}\vec{n}) dO = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_{V} \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) dV = 0$$

$$\int\limits_{V} \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v})\right]}_{=0} dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$

integrale Darstellung der Kontinuitätsgleichung ist äquivalent der differentiellen Betrachtung!

Der Impulssatz

raumfestes KV

[Bild]

Massen- (Volumen-) Kräfte

Ursache: Kraftfelder (Gravitation $\rightarrow$ andere werden vernachlässigt)

Oberflächenkräfte (Kontaktkräfte)

$\vec{\tau}$ ... Spannungsvektor $(\vec{x}, \vec{n})$

[Bild]

vektorielle Kräftebilanz:

$$\vec{\tau}A = \vec{\tau}_x A_{yz} + \vec{\tau}_y A_{xz} + \vec{\tau}_z A_{xy}$$

$$A_{yz} = A\cos\left[\angle(\varepsilon_t, \varepsilon_{xy})\right] = A\cos\left[\angle(\vec{n}, \vec{e}_x)\right],$$

$$\langle \vec{n}, \vec{e}_x \rangle = |\vec{n}||\vec{e}_x|\cos\alpha_{xy} = n_x$$

$$A_{yz} = An_x; A_{xz} = An_y; A_{yx} = An_z$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_x n_x + \vec{\tau}_y n_y + \vec{\tau}_z n_z$$

$$\vec{\tau}_x = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}; \ \vec{\tau}_y = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}; \ \vec{\tau}_z = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma \textit{...Normalspannung} \\ \tau \textit{...Schubspannung} \end{matrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$ ... Tensor 2. Stufe

Druck

Fluid in Ruhe: $\tau = 0$

Kann nur Druckkräfte aufnehmen $\rightarrow$ keine Zugkräfte

Definition:

[Bild]

$\vec{p}$ wirkt immer senkrecht auf Schnittfläche

$\vec{p}$ hat immer den gleichen Betrag, unabhängig von Richtung der Schnittfläche

$$\vec{p} = -p\vec{n}$$

Druck abspalten:

$\rightarrow$ nur mehr bewegungsinduzierte Größen in $\vec{\tau}$ verbleiben

$$\vec{\tau} = -p\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} + p \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} n_y + \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} n_z$$

$\tau_{xx} = \sigma_{xx} + p$; $\tau_{yy} = \sigma_{yy} + p$; $\tau_{zz} = \sigma_{zz} + p$

Formulierung des Impulssatzes

Änderung von $\rho\vec{v}$ des raumfesten KV = resultierender Impulsfluß über die Oberfläche + $\sum Oberflaechen + Massenkraefte$

$$-\int_O \underbrace{\rho\vec{v}}_{\mathrm{Im}\,puls} (\vec{v}\vec{n})dO + \int_O -p\vec{n}dO + \int_O \vec{\tau}_x n_x dO + \int_O \vec{\tau}_y n_y dO + \int_O \vec{\tau}_z n_z dO + \int_V \rho\vec{f}^{\,b} dV$$

$$\begin{pmatrix} zeitliche\_Aenderung \\ des\_\mathrm{Im}\,pulses\_im \\ Inneren\_des\_KV \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} austretender \\ \mathrm{Im}\,pulsflusz \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e\,\mathrm{int}\,retender \\ \mathrm{Im}\,pulsflusz \end{pmatrix} = \sum \vec{F}$$

differentielle Formulierung

Gausz'scher Integralsatz, i.A.:

$$\int_O A n_x dO = \int_V \frac{\partial A}{\partial x} dV$$

$$\left[\int_V div\vec{A}dV = \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV\right]$$

$$\int_O \vec{\tau}_x n_x dO = \int_O \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} n_x dO$$

$$\int_O \vec{\tau}_y n_y dO = \int_O \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} n_y dO$$

$$\int_O \vec{\tau}_z n_z dO = \int_O \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix} n_z dO$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x^b + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ &\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y^b + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ &\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z^b + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned}}$$

τ_{ij} : repräsentieren die Übertragung von j-Impuls in i-Richtung

Aufgabe: bringe τ_{ij} in Verbindung mit dem Strömungsfeld, d.h., mit $\vec{v}$ und seiner Veränderlichkeit in den 3 Raumrichtungen $\rightarrow$ Rheologie

$\tau_{ij} = f(\vec{v})$ $\rightarrow$ Fließgesetz

Die Energiegleichung (1. Hauptsatz)

Axiom:

zeitliche Änderung der gesamten (kinetischen und inneren) Energie eines Körpers = Summe der Leistungen der am Körper wirkenden Kräfte + der übertragenen Wärmeleistung

Herleitung am raumfesten KV

(offenes System mit ein- und ausfließender Masse)

[Bild]

zeitliche Änderung der gesamten Energie im Inneren des KV ist:

$\int_{V_K} \frac{\partial}{\partial t} \rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2}) dV$; e ... massenspezifische innere Energie

ist gleich Energiefluß über die Oberfläche O_k des KV:

$$-\int_{O_k} \rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2})(\vec{v}\vec{n}) dO \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{J}{\cancel{kg}} \frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}^3} \cancel{m}^3 \frac{1}{s}\right] = \left[\frac{J}{s}\right] = [W]$$

plus Leistung der äußeren Kräfte:

(Kraft * Geschwindigkeit) ... skalare Multiplikation!

$$\rightarrow \quad \int_{V_K} \rho \vec{v} \vec{f}^B dV - \int_{O_K} \rho (\vec{v}\vec{n}) dO + \int_{O_K} \vec{v}\, \vec{\tau} dO$$

plus übertragene Wärmeleistung

$$-\int_{O_K} (\vec{q}\vec{n}) dO \text{ ; } \vec{q} \text{ ... übertragene Wärmestromdichte } \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

mit: $\vec{\tau} = \vec{\tau}_x n_x + \vec{\tau}_y n_y + \vec{\tau}_z n_z$ $\rightarrow$ Energiegleichung in integraler Form

$$\int_{V_K} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2}) \right] dV + \int_{O_K} \rho (e + \frac{\vec{v}^2}{2})(\vec{v}\vec{n}) dO =$$

$$= \int_{V_K} \rho \vec{v} \vec{f}^B dV - \int_{O_K} p (\vec{v}\vec{n}) dO + \int_{O_K} \vec{v}\, \vec{\tau}_x n_x dO + \int_{O_K} \vec{v}\, \vec{\tau}_y n_y dO + \int_{O_K} \vec{v}\, \vec{\tau}_z n_z dO - \int_{O_K} (\vec{q}\vec{n}) dO$$

$\rightarrow$ in Worten: Energieänderung im Inneren des KV + (austretender - eintretender) Energiestrom = Leistung der äußeren Kräfte + übertragene Wärmeleistung

differentielle Form

Anwendung des Gausz'schen Integralsatzes auf Oberflächenintegrale $\rightarrow$ Volumsintegrale

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(e+\frac{\vec{v}^2}{2})\right]+\vec{\nabla}\left[\rho(e+\frac{\vec{v}^2}{2})\right]\vec{v}=$$
$$=\rho\vec{v}\vec{f}^B-\vec{\nabla}(p\vec{v})+$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz})+\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz})+\frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\tau_{zz})+$$
$$\vec{\nabla}\vec{q}$$

bisher hergeleitete Erhaltungssätze gelten allgemein (unter den gemachten Einschränkungen) $\rightarrow$ spezialisieren

1. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho\vec{v})=0$$

$\rightarrow$ speziell für inkompressible Fluide:

$\rho\equiv const(\forall t,\vec{x})$

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}\vec{v}=0\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

für die meisten Flüssigkeitsströmungen anwendbar (auch für hinreichend langsame Gasströmung $\rightarrow M\le 0.2$)

2. Impulsgleichung(en)

x-Koordinate, linke Seite:

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho u\vec{v})$$
$$=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\vec{\nabla}(\rho\vec{v})+\rho\vec{v}\vec{\nabla}u=$$
$$=\rho\underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})u\right]}_{\frac{du}{dt}}+u\underbrace{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho\vec{v})\right]}_{=0}=$$
$$=\rho\underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}_{konvektive\_Beschleunigung}\right]}_{subs\tan tielle\_Beschleunigung}$$

Spezialisierung (auf Newton'sches Fließgesetz):

Formulierung der τ_{ij} entsprechend dem Fließgesetz $\rightarrow$ extra vorhanden!

$$\tau_{xx}=\mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}(\vec{\nabla}\vec{v})\right]$$
$$\tau_{yy}=\mu\left[2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}(\vec{\nabla}\vec{v})\right]$$
$$\tau_{zz}=\mu\left[2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}(\vec{\nabla}\vec{v})\right]$$
$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]$

μ ... dynamische Viskosität $\left[\frac{Ns}{m^2}\right] = [Pa \cdot s]$

τ_{ij} einsetzen in Impulsgleichung und weiter spezialisieren auf inkompressiblen Prozess

$\rightarrow$ Impulsgleichung für Newton'sches, inkompressibles Fluid:

(x) $\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})u\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_x^B \rho$

(y) $\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_y^B \rho$

(z) $\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})w\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial z} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_z^B \rho$

$\rightarrow$ Navier- Stoke'sche Gleichungen

inkompressibles Kontinuum

$\vec{\nabla}\vec{v} = 0$

wichtiger Gleichungssatz für inhomogenes, Newton'sches Kontinuum bei konstanter Temperatur

Hydro- und Aerostatik

Ausgangspunkt: Grundgleichungen

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$

Impulsgleichungen:

(x) $\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})u\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_x^B \rho$

(y) $\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_y^B \rho$

(z) $\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})w\right] = -\frac{\partial \rho}{\partial z} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_z^B \rho$

für ruhende Fluide:

$u = v = w = 0$

τ_{ij} nur in bewegten Fluiden $\rightarrow$ $\tau_{ij} = 0$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Impulsgleichungen:

(x) $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x^B$

(y) $\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y^B$

(z) $\dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z^B$

kompakt: $\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}^B$

Index-Schreibweise: $\dfrac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i^B$

$\boxed{\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}^B \text{ ... Grundgleichung der Hydro- und Aerostatik}}$

Hydrostatik: $\rho = const.$

Aerostatik: $\rho \neq const.$

Aufgabestellung in der Hydrostatik

Berechnung von Auftriebskräften

Berechnung von Kräften auf Wände

Berechnung freier, ruhender Oberflächen

1. hydrostatischer Auftrieb (Archimedes)

Anordnung: [Bild]

resultierende Kraft durch Druck auf O_K

$$\vec{F} = -\int_{O_K} p\vec{v}dO = -\int_{V_K} \vec{\nabla} p dV$$

$\rightarrow$ Druckgleichung $\rightarrow$ $= -\int_{V_K} \rho \vec{f}^B dV$ $\rightarrow$ Integrand = const. $\rightarrow$

$\left(\vec{f}^B = \vec{g}\right) \Rightarrow -\rho \vec{g} V_K$

Gewichtskraft wirkt ebenfalls auf den Körper $\rightarrow$ resultierende Kraft in z-Richtung:

$$\vec{F}_{res} = (\rho_K - \rho_{Fl})\vec{g}(V_K)$$

2a. Druck auf feste Wände

Anordnung: [Bild]

$\rightarrow$ Ersatzkörper mit $V_K; O_K = M + O_d + A$

Kraft auf gesamte Körperoberfläche $\rightarrow \vec{F}$

$$\vec{F} = -\int_{O_K} p\vec{n}dO = -\int_A p\vec{n}dA - \int_M p\vec{n}dM - \int_{O_d} p\vec{n}dO_d = -\rho \vec{g} V_K$$

gesucht: Kraft auf A:

$$\vec{F}_A = -\int_A p\vec{n}dA \rightarrow \vec{F}_A = -\rho \vec{g} V_K + \int_M p\vec{n}dM + p_0 O_d$$

Berechnung der Kraftkomponenten:

$$F_{A_z} = \vec{F}_A \vec{e}_z = -\rho \vec{g} \vec{e}_z V_K + 0 + p_0 O_d$$

$$F_{A_x} = \vec{F}_A \vec{e}_x = -\int_A p\vec{v}\vec{e}_x dA = -sign(\vec{n}\vec{e}_x)\int_{A_x} pdA$$

$$F_{A_y} = \vec{F}_A \vec{e}_y = -\int_A p\vec{v}\vec{e}_y dA = -sign(\vec{n}\vec{e}_y)\int_{A_y} pdA$$

2b. Kräfte auf ebene Wände

Anordnung: [Bild]

$\rightarrow$ Druckkräfte stehen senkrecht auf Wandoberfläche

[Bild]

Druck aus hydrostatischer Grundgleichung:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

$$p = p_0 + \rho g h = p(h)$$

Zusammenhang y-h:
$h = y\cos\alpha \to p(y) = p_0 + \rho g y \cos\alpha$

gesucht: resultierende Kraft auf Flächenelement bzw. Integral auf die gesamte Klappe:

$d\vec{F} = \vec{n}(p(y) - p_0)dA = \vec{n}\rho g y \cos\alpha dA$

$\xrightarrow{\text{integrieren}} \vec{F} = \vec{n}\rho g \cos\alpha \int_A y dA$

da $\int_A y dA = y_s A$ ... (y-Koordinate des Flächenschwerpunktes) *

(Flächeninhalt) $\Rightarrow$

$\vec{F} = \vec{n}\rho g \cos\alpha y_s A \to$

formulierbar als: $\vec{F} = \vec{n}(p_s - p_0)A$

das heißt nicht, das die Kraft am Flächenschwerpunkt angreift!
Kraftmittelpunkt berechnen aus Momentengleichgewicht
Koordinate dieses Punktes ist y_D

$y_D F = \int_A y dF \to y_D \rho g y_s \cos\alpha A = \rho g \cos\alpha \int_A y^2 dA$

da $\int_A y^2 dA$ Flächenträgheitsmoment um z-Achse = $I_z \Rightarrow y_D = \dfrac{I_z}{y_s A}$

Abstand $y_D - y_s$ $\to$ Steiner'scher Satz

$$I_z = I_s + y_s^2 A \Rightarrow y_D - y_s = \frac{I_s}{y_s A} = e$$

analoge Rechnung führt zu:

$$z_D = \frac{I_{yz}}{y_s A}, \text{ wobei } I_{yz} = \int_A yz dA$$

Bemerkung: Wände können auch von unten benetzt sein
Beispiel: [Bild]

3. Hydrostatik im rotierenden Behälter
Anordnung: [Bild]
Grundgleichung:

$\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}^B$ bei Rotationssymmetrie (Starrkörperrotation)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial r} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ -g \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{integrieren}} \begin{array}{l} p = \dfrac{\rho}{2}\omega^2 r^2 + f(z) \\ p = -\rho g z + f(r) \end{array}$$

beide Funktionen müssen gleich groß sein und miteinander vereinbar

$$\Rightarrow p(r,z) = \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 - \rho g z + C$$

an der Flüssigkeitsoberfläche bei $r = 0, z = h_0$ herrscht $p = p_0$

$\to p_0 = 0 - \rho g h_0 + C \Rightarrow$

$p(r,z) = p_0 + \dfrac{\rho}{2} w^2 r^2 - \rho g(z - h_0) \leftrightarrow$ Druckverteilung in der Flüssigkeit

Form der freien Oberfläche: z_F

dort herrscht überall der gleiche Druck $p = p_0$

$$\Rightarrow p_0 = p_0 + \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 - \rho g(z_F - h_0)$$

$$\Rightarrow z_F - h_0 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 \;\; ... \;\; 0 \le r \le R$$

$\Rightarrow$ Rotationsparaboloid

h_0 gegebenenfalls aus vorgegebenem Flüssigkeitsvolumen errechnen

4. freie Oberflächen – Kapillarität

Oberflächenspannung entsteht durch ‚molecular mismatch'

[Bild]

Oberflächenspannung ist flächenspezifische Arbeit, die zur Erzeugung der freien Oberfläche erforderlich ist

[Bild]

R_1, R_2 ... Hauptkrümmungsradien

Wirkung der Oberflächenspannung:

Druckerhöhung im Inneren der Fläche

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \left[\frac{N}{m^2}\right]; \; \sigma \text{ ... Oberflächenspannung}$$

(Young-)LaPlace'sche Formel

Beispiel: Tropfen mit Radius R

[Bild] $\Rightarrow \Delta p = \frac{2\sigma}{R}$

z.B.: Wasser (20°C): $\sigma = 72 \cdot 10^{-3}\frac{N}{m}; R = 100\mu m$

$$\Delta p = \frac{2 \cdot 72 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 1440\frac{N}{m^2} = 14{,}4 mbar(hPa)$$

Grenzflächenspannung ist auch Ursache für Ausbildung gekrümmter Menisken an Grenzen zweier Fluide gegen Festkörper

[Bild]

Form der freien Oberfläche sei $z = z(y)$

Krümmungsradius der Grenzfläche sei R:

statischer Druck in beiden Fluiden:

$$p_1 = p_0 - \rho_1 gz; p_2 = p_0 - \rho_2 gz$$

sei Fluid2 ein Gas: $\rho_2 <<; \rho_1 \approx \rho$

$$p_2 - p_1 = (\rho_1 - \rho_2)gz(y) = \rho gz(y)$$

nach Young- LaPlace

$$\frac{\sigma}{R} = \rho gz(y)$$

dimensionslos darstellen

$$\frac{z(y)}{a} = \frac{a}{R}; a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \text{ ... LaPlace'sche Länge} \rightarrow$$

„Kapillarlänge"

Wasser: $a \cong 3mm$

Aerostatik

Aerostatik behandelt das Verhalten der (ruhenden) Atmosphäre hinsichtlich $p = p(z)$

Grundgleichung: $\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}^B$, wobei hier $\vec{f}^B = \vec{g}$

Luft hier als inkompressibel behandelt

Anordnung: [Bild]

Spezialisieren der Grundgleichung:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \xrightarrow{Trennung\_der\_Variablen} dz = -\frac{1}{g}\frac{dp}{\rho}$$

zur Berechnung von $p(z)$ brauchen wir $\rho = \rho(p)$

wir behandeln Luft als ideales Gas. Veränderlichkeit $\rho = \rho(p)$ kann unterschiedlich modelliert werden

allgemeinster Fall: polytroper Vorgang

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = const. \Rightarrow \rho(p) = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

eingesetzt in Differentialgleichung

$$\rightarrow z\Big|_{z=0}^{z} = -\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{g\rho_0} \int_{p_0}^{p(z)} p^{-\frac{1}{n}} dp$$

$$= -\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{g\rho_0} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left[p(z)^{1-\frac{1}{n}} - p_0^{1-\frac{1}{n}} \right] = \frac{p_0}{g\rho_0} \frac{n}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p(z)}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

nenne $\frac{p_0}{g\rho_0} = H_0[m] \rightarrow$

$$\boxed{\frac{p(z)}{p_0} = \left[1 - \frac{n-1}{n}\frac{z}{H_0}\right]^{\frac{n}{n-1}}}$$

Spezialfälle für Polytropenexponent:

n=1 ... isotherm

mit $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^n = e^x \Rightarrow \frac{p(z)}{p} = e^{-\frac{z}{H_0}}$ ... Druck sinkt exponentiell

n=κ ... isentrop (κ=1.4)

n=1.235 ... Standard-Atmosphäre

mit: p_0=1.01325bar

T_0=288.15K

Aufgabenstellungen:

Messung von Flughöhen aus Druckmessungen

Volumenzunahme von Gasbalons bei Höhenänderung

Reibungsfreie, inkompressible Strömung

Es gibt große Bereiche von Strömungsfeldern, wo die Geschwindigkeitsgradienten klein sind ($\rightarrow$ außerhalb von Grenzschichten $\rightarrow$ Video?)

[Bild]

Grundgleichungen:

Kontinuitätsgleichung

wegen $\rho = const.$ wird $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\vec{\nabla}\vec{v}) = 0$ zu $\vec{\nabla}\vec{v} = div\vec{v} = 0$

... Solenoidel

in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

integriert über das Volumen

$$\Rightarrow 0=\int_{V_K} div\vec{v}dV=\int_O \vec{v}\vec{n}dO$$

in Worten: austretender – eintretender Massenfluß = 0

Beispiel:

[Bild]

eintretender Massenfluß: $\rho(\omega_1 A_1+\omega_2 A_2)$

austretender Massenfluß: $\rho\omega_3 A_3$

$\Rightarrow \omega_3 A_3=\omega_1 A_1+\omega_2 A_2$

[Bild]

$$\int_O \vec{v}\vec{n}dO=0=\vec{w}_1\vec{n}_1 A_1+\vec{w}_2\vec{n}_2 A_2+\vec{w}_3\vec{n}_3 A_3=-w_1 A_1-w_2 A_2+w_3 A_3=0$$

Impulsgleichungen

für reibungsfreies Fluid verschwinden alle Terme mit τ_{ij}

$$\left.\begin{aligned}(x)...\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho u\vec{v})&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x^B\\(y)...\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho v\vec{v})&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_y^B\\(z)...\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho w\vec{v})&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z^B\end{aligned}\right\}\text{Euler-Gleichungen}$$

kompakte Schreibweise:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\vec{f}^B$$

dabei kann geschrieben werden

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}=\vec{\nabla}\frac{\vec{v}^2}{2}-\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

einsetzen

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\nabla}\frac{\vec{v}^2}{2}-\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\vec{f}^B \quad ...$$ Lame'sche Form der Euler- Glg

für stationäre Strömungen $\frac{\partial}{\partial t}=0$ schreibt man mit der ersten Formulierung

$$(x)...\vec{\nabla}(\rho u\vec{v})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x^B$$

$$(y)...\vec{\nabla}(\rho v\vec{v})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_y^B$$

$$(z)...\vec{\nabla}(\rho w\vec{v})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z^B$$

integrieren über Volumen: Beispiel mit (x)

$$\int_{V_K}\left[\vec{\nabla}(\rho u\vec{v})+\frac{\partial p}{\partial x}-\rho f_x^B\right]dV=0\xrightarrow{Gausz'scher\_Integralsatz}$$

$$\int_{O_K} u(\rho\vec{v}\vec{n})dO + \int_{O_K} pn_x dO - \int_{V_K} + \rho f_x^B dV = 0$$

Situation: z.B. Krümmer

[Bild]

$\vec{F}$ sind alle Druckkräfte auf die Mantelfläche. Diese sind unbekannt und sollen berechnet werden. Sie werden als äußere Kräfte bezeichnet.

Impulsgleichung in Worten: (für x-Richtung)

austretender Impulsfluß – eintretender Impulsfluß = $\sum$ Druckkräfte auf Stirnfläche + $\sum$ äußere Kräfte + $\sum$ Volumskräfte

Umgebungsdruck p_0 wirkt gegen die Strömung auf der Projektion der Mantelfläche auf die Stirnflächen

Beispiel: Rohrkrümmer

[Bild]

Vorgehen: Impulssatz >0 ansetzen wenn Impulse in positive Strömungsrichtung zeigen (I_{ein} und I_{aus})

Bilanz in x-Richtung:

$I_{aus_x} = 0$

$I_{ein_x} = \omega_1(\rho\omega_1 A_1) = \rho\omega_1^2 A_1$

Bilanz:

$0 - \rho\omega_1^2 A_1 = p_1 A_1 - p_0 A_1 - F_x \Rightarrow F_x = \rho\omega_1^2 A_1 + A_1(p_1 - p_0) > 0$

$\Rightarrow$ Kraft zeigt in gewählte Richtung

Bilanz in y-Richtung:

$I_{aus_y} = \omega_2(\rho\omega_2 A_2) = \rho\omega_2^2 A_2$

$I_{ein_y} = 0$

Bilanz:

$\rho\omega_2^2 A_2 - 0 = p_0 A_2 - p_2 A_2 - F_y \Rightarrow F_y = -\rho\omega_2^2 A_2 - A_2(p_2 - p_0) < 0$

$\Rightarrow$ F_y nicht anders als angesetzt

abschließende Bemerkung:

Für inkompressible, reibungsfreie Strömungen sind 4 Unbekannte u, v, w, p mit 4 Gleichungen zu bestimmen (Kontinuitätsgleichung + 3 Impulsgleichungen)

$\rightarrow$ Energiegleichung hier überflüssig

Dieser Spezialfall ist aber technisch trotzdem wichtig.

Bernoulli-Gleichung

Herleitung aus der Impulsgleichung (Lamé):

$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{\vec{v}^2}{2} - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f}^B$ unter Annahme: $\vec{f}^B = -\vec{\nabla}\Pi$

Π ... Potential der Massenkräfte (z.B. $\Pi = gz$)

bilde Skalarprodukt mit $d\vec{x}$ (längs Teilchenbahn)

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}d\vec{x} + d\vec{x}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi\right) - d\vec{x}\left(\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})\right) = 0$$

[Bild]

Integration (mit $d\vec{x}\vec{\nabla}\big|G$)

$$=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz=dG$$ ... totales Differential

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}d\vec{x}+\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)_2-\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi\right)_1=0$$

instationäre Bernoulli-Gleichung für inkompressible Medien

[Bild]

Flüssigkeitsfäden im U-Rohr $\rightarrow$ Länge

$L=2h+\Pi R$

Querschnitt

A=const. wegen ρ=const.

$\Rightarrow \dot{x}=const.$ längs x

$\Rightarrow \ddot{x}=const.$

instationäre Bernoulli-Gleichung:

$\ddot{x}L+gz_2-gz_1=0$

$z_2-z_1=2x$ ... aus Geometriegründen

$\Rightarrow \ddot{x}L+2gx=0$

zweite Ableitung + ‚faktorisierte Funktion selbst = 0' $\Rightarrow$ Funktion ist sin oder cos

$$x(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t) \text{ mit } \omega=\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$\Rightarrow$ Kreisfrequenz ω der Strömung ist bestimmt!

Der statisch ebene Sonderfall

das Cauchy- Riemann Problem:

a. Stromlinienfunktion

statischer Fall der Bernoulli-Gleichung (ohne Massenkraft)

$$\frac{\vec{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}=const. \text{ längs der Teilchenbahn}$$

bzw. $\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=0$ aus Lamé-Impulsgesetz

$$\Rightarrow 0=\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)$$

$\Rightarrow dA\vec{v}\neq 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v}=0$ ... statisch, reibungsfrei

$\Rightarrow$ Strömungen sind rotationsfrei

Gleichungssystem für Spezialfall

$rot(\vec{v})=0$ ... Impulsgleichungen

$div(\vec{v})=0$ ... Kontinuitätsgleichungen

ebener Fall

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Idee: Einführung von Stromfunktion ψ, sodaß

Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt

$\psi=\psi(x,y)$

Definition: $\frac{\partial\psi}{\partial y}=u;\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v$

eingesetzt in den Impulssatz

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\Leftrightarrow\Delta\psi=0$$

Interpretation von ψ

Differentialgleichung der Stromlinie

$\vec{v}\times d\vec{x}=0$

$\Rightarrow udy-vdx=0$

$\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=d\psi=0$

$\Rightarrow\psi=const.$ längs der Stromlinie

wäre, z. B., $\psi=x^2+y^2=const.\Rightarrow$ kreisförmige Stromlinie

bilde Richtungsableitung

senkrecht zur Stromlinie

[Bild]

$\vec{n}\vec{v}=0\Leftrightarrow n_x u+n_y v=0$

Richtungsableitung ist

$$\left.\frac{D\psi}{Dn}\right|\vec{n}=grad(\psi)*\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=$$

$$=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}v+\frac{\partial\psi}{\partial y}u\right)\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$=\sqrt{u^2+v^2}=\|\vec{v}\|$$

$\rightarrow$ Volumenstrom zwischen 2 Stromlinien

[Bild]

$$\dot{V}=\int_1^2\|\vec{v}\|dn=\int_1^2\frac{D\psi}{Dn}|\vec{n}dn=\int_1^2 d\psi=\psi_2-\psi_1\left[\frac{m^3}{s}\right]$$

b. Geschwindigkeitspotential

Gleichung $rot\vec{v}$ identisch erfüllt, wenn $\vec{v}$ als Gradient einer Funktion darstellbar ist

$$\vec{v}=grad\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ einsetzen in Gleichung $rot\vec{v}=0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0\rightarrow \text{ wird identisch erfüllt}$$

$\rightarrow$ einsetzen in Kontinuitätsgleichung

$$div(grad\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\Rightarrow\Delta\varphi=0$$

Linien $\varphi=const.$ heißen Potentiallinien

c. komplexes Geschwindigkeitspotential
(„komplexwertige Funktionentheorie“)

Beispiel:

$w(z) = z^2$

oder

$w(z) = i\ln(z)$ ... wobei $z = x + yi$

$w(z)$ kann in einen Real- und einen Imaginärteil zerlegt werden

$\rightarrow$ $w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$

z. B. für $w(z) = i\ln(z) \rightarrow z = re^{i\Phi}$

$$\Rightarrow w = i\ln(z) = i\ln(re^{i\Phi}) =$$

$$= i\ln(z) + i^2\Phi = \underbrace{-\Phi}_{\varphi(x,y)} + \underbrace{i\ln(r)}_{\psi(x,y)}$$

wobei $\Phi = \arctan\left(\frac{4}{x}\right); r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Funktionen $w(z)$ müssen analytisch sein, insbesondere nur von z abhängen $\Rightarrow$ Bedingungen sind geknüpft an die Funktionen φ und ψ

Beispiel, wo dies versagt:

$w(z) = z = x + iy$

konjugiert

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$y = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

$$w(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + i\left(\frac{i}{2}(z - \bar{z})\right)$$

$\Rightarrow$ abhängig von z und $\bar{z}$

Frage: welche Bedingungen müssen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ erfüllen, damit $w(z) = \varphi + i\psi$ analytische Funktionen darstellen?

es muß offenbar gelten

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

wende Kettenregel an

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}$$

ferner

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

aufgrund $\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}; \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}$ $\rightarrow$ einsetzen

$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{i}{2} \overset{!}{=} 0$$

Real- und Imaginärteil müssen 0 sein

$\rightarrow$ trenne nach Real- und Imaginärteil

Imag.teil: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0$

$\Leftrightarrow$ $\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}$ ... Cauchy- Riemann'sche DGl

1. DGl: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=u$

2. DGl: $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=v$

Potential- und Stromlinienfunktion erfüllen Cauchy-Riemann'sche DGl

$\Rightarrow$ Funktion

$v'(z)=\varphi+i\psi$ ... ist analytisch im Sinne der Funktionentheorie

getrennt: komplexes Geschwindigkeitspotential

Grund für die Bezeichnung:

$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dw}{dz}$ da $z=x+iy$

$\Rightarrow\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=u-iv$ ... konjugierte, komplexe Geschwindigkeit

$\Rightarrow$ wenn $w(z)$ gefunden, kann $\vec{v}$ leicht berechnet werden

Bemerkungen:

1. verschiedene Lösungen (z. B. ψ_1,ψ_2) der LaPlace- Gleichung $\Delta\psi=0$ dürfen addiert werden und bilden damit eine weitere Lösung:

   $\Delta\psi_1=0;\Delta\psi_2=0\xrightarrow{Superposition}\Delta(\psi_1+\psi_2)=0$

2. da $grad\varphi=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix};grad\psi=\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$

   $grad\varphi\cdot grad\psi=0$

   $\Rightarrow$ Strom- und Potentiallinien schneiden einander senkrecht

   [Bild]

Zirkulation: weitere kinematische Größe von Strömungsfeldern:

[Bild]

Definition:

$$\Gamma=\oint_C\vec{v}d\vec{s}\left[\frac{m^2}{s}\right]$$

wichtige Aussage über Strömungsfelder:

aufgrund des Stoke'schen Integralsatzes

$$\Gamma=\oint_C\vec{v}d\vec{s}=\int_A rot\vec{v}d\vec{A}\text{ mit }d\vec{A}=\vec{n}dA$$

[Bild]

$\Rightarrow$ in einem rotationsfreien (wirbelfreien) Strömungsfeld ist $\Pi = 0$ längs jeder geschlossenen Kurve C

Veränderlichkeit von Γ

herleiten aus Impulsgleichungen

$$(x) \ldots \; u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \Bigg| \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(y) \ldots \; u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \Bigg| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} - \frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right) rot\vec{v} = 0$, bzw. da hier stationär

$$\frac{d}{dt}\int rot\vec{v}\,d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\oint_C \vec{v}\,d\vec{s} = \boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0}$$

$\Rightarrow$ bei einer stationären, reibungsfreien Strömung bleibt eine einmal eingeführte Zirkulation erhalten!

[Bild]

Lösungen des Cauchy- Riemann Problems (einfache Strömungsfelder)

a. parallele Strömung

gegeben sei $w(z) = ae^{-i\alpha}z + b$ mit $a, b, \alpha \in R$

zerlege $w(z)$ in Real- und Imaginärteil

mit $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha; z = x + iy$

$$\Rightarrow w(z) = a(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + b + ia(y\cos\alpha - x\sin\alpha) =$$
$$= \varphi + i\psi$$

Linien $\psi = const. = C$ sind

$$a(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = C$$

$$\Rightarrow y = \frac{C}{a\cos\alpha} + x\tan\alpha$$

$\Rightarrow$ Geradenschar für verschiedene C

[Bild]

Geschwindigkeiten:

$$\frac{dw}{dz} = ae^{i\alpha} = a\cos\alpha - ia\sin\alpha = u - iv$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u = a\cos\alpha \\ v = a\sin\alpha \end{array}$$

$\sqrt{u^2 + v^2} =$ Betrag der Geschwindigkeit $= a$

a wird oft als U_∞ bezeichnet

Frage nach Zirkulation:

[Bild]

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}d\vec{s} = \underbrace{\int_1^2 \vec{v}d\vec{s}}_{=0} + \int_2^3 \vec{v}d\vec{s} + \underbrace{\int_3^4 \vec{v}d\vec{s}}_{=0} + \int_4^1 \vec{v}d\vec{s} =$$

$$= -U_\infty l + U_\infty l = 0$$

$\Rightarrow$ Parallelströmung ist zirkulationsfrei

b. Quell- oder Senkenströmung

gegeben sei $w(z) = B\ln\frac{z}{a}$ mit $B, a = const. \in R$

$\rightarrow$ zerlegen

$$w(z) = B\ln(z) - B\ln(a)$$

$$\Rightarrow w(z) = B\ln\left(\frac{r}{a}e^{i\Phi}\right) =$$

$$= \underbrace{B\ln\left(\frac{r}{a}\right)}_{\varphi(x,y)} + i\underbrace{B\Phi}_{\psi(x,y)}$$

Linien $\varphi = const.$ sind Linien $r = const. \Rightarrow$ Kreise

Linien $\psi = const.$ sind gegeben durch $\Phi = const. \Rightarrow$ Geraden durch den Ursprung

[Bild]

Geschwindigkeit:

$$\frac{dw}{dz} = B\frac{a}{z}\frac{1}{a} = \frac{B}{z} =$$

$$= \frac{B}{r}e^{-i\Phi} = \underbrace{\frac{B}{r}\cos\Phi}_{u} - i\underbrace{\frac{B}{r}\sin\Phi}_{v} = u - iv$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{B}{r}$$

Punkt $r = 0$ (Ursprung des Koordinatensystems) $\rightarrow$ singulärer Punkt dort also auch keine Kontinuitätsgleichung ansetzbar

Volumenfluß des Fluids aus der Quelle oder in die Senke:

$$\dot{Q} = \int \vec{v}d\vec{A} = \int_0^{2\pi} |\vec{v}| r d\varphi = B \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} B > 0 ... Quelle \\ B < 0 ... Senke \end{matrix}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\dot{Q}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow w(z) = \frac{\dot{Q}}{2\pi}\ln\frac{z}{a}$$

$\dot{Q}$ ... Volumenfluß pro Einheitstiefe (in z-Richtung) des Strömungsfeldes

Frage: Zirkulation

[Bild]

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}d\vec{s} = \int_1^2 \vec{v}d\vec{s} + \underbrace{\int_2^3 \vec{v}d\vec{s}}_{=0} + \int_3^4 \vec{v}d\vec{s} + \underbrace{\int_4^1 \vec{v}d\vec{s}}_{=0} =$$

$$= \int_1^2 \frac{B}{r}dr - \int_1^2 \frac{B}{r}dr = 0$$

c. Potentialwirbel

gegeben sei $w(z) = -iB\ln\frac{z}{a}$ mit $B, a = const. \in R$

$z = re^{i\Phi}$

$$\Rightarrow w(z) = -iB\ln\left(\frac{r}{a}e^{i\Phi}\right) = \underbrace{B\Phi}_{\varphi(x,y)} + i\underbrace{\left(-B\ln\frac{r}{a}\right)}_{\psi(x,y)}$$

Potentiallinien sind Geraden $\Phi = const.$ durch den Ursprung
Stromlinien sind Kreise $\psi = const.$ um den Ursprung

$\rightarrow$ Strömungsfeld

[Bild]

Geschwindigkeit:

$$\frac{dw}{dz} = -i\frac{B}{z} = -i\frac{B}{r}e^{-i\Phi} = -iB(\cos\Phi - i\sin\Phi) =$$

$$= \underbrace{-\frac{B}{r}\sin\Phi}_{} - i\underbrace{\frac{B}{r}\cos\Phi}_{} = u - iv$$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{B}{r} \Rightarrow$ auch hier stellt der Ursprung eine Singularität dar („Wirbelmittelpunkt“)

Frage: Zirkulation

Kurve C ist ein Kreis um den Ursprung

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{B}{r} r d\Phi = B \cdot 2\pi$$

$\Rightarrow B = \frac{\Gamma}{2\pi} \rightarrow \Gamma$ ... Wirbelstärke

$\rightarrow$ daraus entsteht allerdings ein Widerspruch $\rightarrow$ man muß die Singularität aus der Integration heraushalten

[Bild]

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}d\vec{s} = \int_1^2 \vec{v}d\vec{s} + \underbrace{\int_2^3 \vec{v}d\vec{s}}_{=0} + \int_3^4 \vec{v}d\vec{s} + \underbrace{\int_4^1 \vec{v}d\vec{s}}_{=0} =$$

$$= \int_0^\beta \frac{B}{r} r d\varphi - \int_0^\beta \frac{B}{r} r d\varphi = 0 \rightarrow richtig!$$

d. Dipolströmung

überlagerte Felder einer Quell- und einer Senkenströmung

[Bild]

kombiniertes Strömungsfeld durch Überlagerung

$$\vec{w}(z) = \frac{\dot{Q}}{2\pi}\ln\frac{z + x_0}{a} - \frac{\dot{Q}}{2\pi}\ln\frac{z - x_0}{a}\ ;\ x_0 \in R$$

$$\xrightarrow{erweitern} \quad = \frac{\dot{Q}}{2\pi a} \frac{\ln\frac{z+x_0}{a} - \ln\frac{z-x_0}{a}}{\frac{2x_0}{a}}$$

Annäherung von Quell- und Senkenpunkt ($x_0 \to 0$ und gleichzeitig $\dot{Q} \to \infty$)

$\Rightarrow$ Produkt

$$\dot{Q} \cdot 2x_0 = M \text{ ; } M \text{ ... Dipolmoment}$$

ist $\infty \cdot 0$, und kann daher endlich sein

$$\lim_{x_0 \to 0} W(z) = \frac{M}{2\pi a} \lim \frac{\ln\frac{z+x_0}{a} - \ln\frac{z-x_0}{a}}{\frac{2x_0}{a}} \xrightarrow{l'Hôpital}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{M}{2\pi a} \lim_{x_0 \to 0} \frac{\frac{a}{z+x_0} + \frac{a}{z-x_0}}{\frac{2}{a}} \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow W(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} \text{ ... komplexes Potential des Dipols}$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil (mit $z = re^{i\Phi}$)

$$W(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\Phi} = \frac{M}{2\pi} \cos\Phi + i\left(-\tfrac{M}{2\pi r} \sin\Phi\right) = \varphi + i\Psi$$

Potentiallinien ($\varphi = const.$)

$$\frac{M}{2\pi r} \cos\Phi = const.$$

mit $x = r\cos\Phi$

$$\Rightarrow \frac{M}{2\pi(x^2+y^2)} x = const.$$

hat die Form: $x^2 + y^2 = 2Cx$

$\Leftrightarrow (x-C)^2 + y^2 = C^2 \Rightarrow$ Kreisgleichung

[Bild]

Stromlinien

$$\Psi = \frac{M}{2\pi r} \sin\Phi = const.$$

mit $y = r\sin\Phi$

$$\Rightarrow \frac{M}{2\pi(x^2+y^2)} y = const.$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-C)^2 = C^2$$

Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z^2} = -\frac{M}{2\pi r^2} e^{-2\Phi}$$

$$\xrightarrow{zerlegen} \underbrace{-\frac{M}{2\pi r^2} \cos\Phi}_{u} - i \underbrace{\left(-\frac{M}{2\pi r^2} \sin 2\Phi\right)}_{v}$$

$\Rightarrow$ Betrag der Geschwindigkeit

$$|\vec{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{M}{2\pi r^2}$$

$\Rightarrow$ Ursprung $r = 0$ ist eine Singularität

e. Umströmung eines Kreiszylinders

[Bild]

Anforderung:

Durch Überlagerung von einfachen Potentialströmungen Feld erzeugen

mit einer kreisförmigen Stromlinie

mit Parallelströmung (längs x) in großem Abstand vom Ursprung

werden erfüllt durch Feld, bei dem Parallelströmung mit Dipolströmung überlagert wird.

Wir überlagern aber zusätzlich einen Potentialwirbel

$$w(z) = Cz + \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} + \frac{-i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{R}\text{; mit } C, M, \Gamma, R = const.$$

Aufspaltung:

$$w(z) = Cre^{i\Phi} + \frac{M}{2\pi r}e^{-i\Phi} + \frac{-i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{R}e^{i\Phi}$$

$$\Leftrightarrow \qquad w = \left(Cr + \frac{M}{2\pi r}\right)\cos\Phi + \frac{\Gamma}{2\pi}\Phi + \left[\left(Cr - \frac{M}{2\pi r}\right)\sin\Phi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{R}\right]$$

wähle Konstanten so, das eine Stromlinie kreisförmig

mit $r = R$ und $M = 2\pi CR^2$

$\Rightarrow$ Ψ ist auf dem Kreis $r = R$ konstant und insbesondere 0

da $|\vec{v}|$ für Dipol- und Potentialwirbel $\to 0$ für $r \to \infty \Rightarrow$ für $r \to \infty$ bleibt $\vec{v}$ der Parallelströmung übrig

bezeichne: $C = U_\infty$

$\Rightarrow$ Ergebnis dieser Herleitung:

$$w(z) = U_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln\frac{z}{R}$$

als komplexes Potential für Kreiszylinderströmung mit Wirbel

Einschub: Ausdruck Prof. Brenn

Der Tragflügel

Die Form des Tragflügels erzwingt zirkulationsbehaftete Umströmung

[Bild]

Anfahren:

[Bild]

Durch Hinterkantenumströmung wird oberer Staupunkt nach hinten gesaugt

$\to$ es stellt sich stabile Strömung ein

[Bild]

$\Rightarrow$ Zirkulation entsteht

laminare, reibungsbehaftete (viskose) Strömungen

Grundlage zur Beschreibung sind wieder die Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik

Kontinuitätsgleichung

Impulsgleichungen

Energiegleichung für die Unbekannten ρ, p, e, u, v, w

$\tau_{xx},...,\tau_{zz} \rightarrow$ 9 Größen

$\rightarrow$ 15 Unbekannte mit 5 Gleichungen

$\rightarrow$ 10 weitere werden benötigt

Thermodynamik:

$p = p(\rho, T)$

kalorische Zustandsgleichung

$e = e(p, T) = c_v T$

$\rightarrow$ neue Unbekannte (T)

$\rightarrow$ 9 weitere notwendig

a. Boltzmann-Axiom

„Symmetrie der Schubspannungen"

b. Fließgesetz

Schubspannungen so eingeführt, das sie bewegungsinduzierte Größen sind, d. h., Fluid kann nur in Bewegung Schubspannungen aufnehmen

weiterhin wurde experimentell beobachtet, das manche Fluide die Eigenschaft haben, das

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

$\Rightarrow$ Schubspannung hängt mit Geschwindigkeitsgradienten zusammen für die 6 verbleibenden Spannungsgrößen wird dieser Zusammenhang durch das Stoke'sche Reibungsgesetz beschrieben. Dieses Reibungsgesetz liefert die folgende Form der Impulsgleichung für das inkompressible Newton'sche Fluid:

$$(x)...\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)u\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f_x^B$$

... usw. ...

zusätzlich

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow$ 4 Gleichungen in 4 Unbekannten

u, v, w, p

$\rho = const. = bekannt$

$\mu = const. = bekannt$

exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für laminare Strömung

eine laminare Strömung = Schichtenströmung

[Bild]

obere Teilchen kollidieren nicht mit unteren

Hagen-Poiseuille (Rohrströmung)

$$\bar{u} = \frac{1}{2} u_{\max}$$

$$\dot{Q} = \bar{u}\pi R^2 = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^4 \text{; } \frac{dp}{dz} = const.$$

$\rightarrow p = Cz + D$

[Bild]

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\mu L}}$$ ... Hagen-Poiseuille'sches Gesetz

Aufrechterhalten der Strömung bedingt Druckgefälle!

$\rightarrow$ Druckverlust

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{L}$$

gesucht: (nicht nur für laminare Strömungen)

$$\frac{dp}{dz} \approx \frac{\rho}{2}\bar{u}^2 \rightarrow |\Delta p| = \lambda \frac{L}{D}\frac{\rho}{2}u^2;\ \lambda \text{ ... Rohrwiderstandszahl od. Rohrreibzahl}$$

$$-\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dz} = \lambda \frac{1}{D}\frac{\rho}{2}\bar{u}^2$$

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{8\mu\bar{u}}{R^2} = \frac{32\mu}{D^2}\bar{u} = \frac{64\mu}{\rho D\bar{u}}\frac{1}{D}\frac{\rho}{2}\bar{u}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{u}D\rho}{\mu} = \mathrm{Re} \text{ ... Reynolds-Zahl}$$

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \text{ ... laminare Strömung}$$

Filmströmung auf freier Oberfläche

Voraussetzungen:

dünne Schichtdicken

[Bild]

inkompressibles, Newton'sches Fluid

entwickelt, 2D, kein $\frac{\partial p}{\partial x}$ aufgeprägt

gasförmige Umgebung nicht viskos

Platte undurchlässig

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = 0$$

Impulsgleichungen

$$(x)\text{...}u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + g\cos\beta$$

$$(y)\text{...}u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \upsilon\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] - g\sin\beta$$

$$(x)\text{...}0 = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g\cos\beta \Rightarrow \mu = \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g\cos\beta = 0$$

$$(y)\text{...}0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\sin\beta$$

$$u(y) = -\frac{\rho q\cos\beta}{\mu}\frac{1}{2}y^2 + A_1 y + A_2$$

A_1, A_2 aus Randbedingungen; $u(y=0) = 0; y = \delta_i \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=r} = 0$

$$A_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{\rho g \cos\beta}{\mu}\delta$$

$$u(y) = \frac{\rho g \cos\beta}{\mu} y\left(\delta - \frac{y}{2}\right) \rightarrow \delta = ?$$

$$\dot{Q} = b\int_0^{\delta} u(y)dy = \frac{\rho g \cos\beta b}{\mu}\int\left(y\delta - \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \frac{\rho g \cos\beta b}{\mu}\left[\delta\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{0}\right]_0^{\delta} = \frac{\rho g \cos\beta b}{3\mu}\delta^3 \rightarrow$$

$$\delta = \left[\frac{3\mu\dot{Q}}{\rho q \cos\beta b}\right]^{1/3}$$

Charakterisierung von Strömungen

$\rightarrow$ Reynolds'sche Zahl (Osborne Reynolds, 1883)

Unterschiede in Strömungen:

Charakterisierung durch dimensionslose Kennzahl (Re)

Herleitung durch entdimensionieren der Navier-Stoke'schen Gleichungen:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \upsilon\Delta v + \vec{f}^{B}$$

charakteristische Geschwindigkeit: $U \rightarrow \vec{v} = U\vec{v}^*$

charakteristische Länge: $L \rightarrow \vec{x} = L\vec{x}^*; x = Lx^*; y = Ly^*$

$$t = \frac{L}{U}t^*$$

$$p = \underbrace{\rho V^2}_{\vec{\nabla} + \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*} p^*$$

$$\frac{U^2}{L}\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L}\left(\vec{v}^*\vec{\nabla}^*\right)\vec{v}^* = -\frac{1}{\rho}\rho U^2\frac{1}{L}\vec{\nabla}^*\vec{p}^* + \frac{vU}{L^2}\Delta^*\vec{v}^*$$

$$\underbrace{\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial t^*} + \left(\vec{v}^*\vec{\nabla}^*\right)\vec{v}^*}_{\text{Trägheitskräfte}} = \underbrace{-\vec{\nabla}^* p^*}_{\text{Druck-kräfte}} + \underbrace{\left(\frac{\upsilon}{UL}\right)}_{\frac{1}{\mathrm{Re}}}\underbrace{\Delta^*\vec{v}^*}_{\text{Zähigkeits-kräfte}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\upsilon} = \frac{UL}{\frac{\mu}{\rho}}$$

z. B.: RB: $\begin{aligned}\vec{v}^*(y^* = 0) &= 0 \\ \vec{v}^*(y^* \rightarrow \infty) &= 1\end{aligned}$

2 Felder, geometrisch ähnlich

in beiden Feldern stimmen Werte von Re überein $\Rightarrow$ beide Felder beschrieben durch idente, dimensionslose RB $\rightarrow$ mathematisch ident

Umströmung einer Kugel

[Bild]

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{U_1 D_1}{\upsilon_1} = \mathrm{Re}_2 = \frac{U_2 D_2}{\upsilon_2}$$

Rohrströmung

[Bild]
Forderungen:

$$\lambda m = \lambda \rightarrow \frac{64}{\mathrm{Re}_m} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \rightarrow \mathrm{Re} = \mathrm{Re}_m$$

$$\left|\vec{v}^*\right| = \frac{|\vec{v}|}{U} = O(1)$$ ... Größenordnung(1) ($\approx < 10^2$)

wenn $|\vec{v}|$ nicht all zu stark von U abweicht

→ Trägheitskräfte: O(1)
Druckkräfte: O(1)
Zähigkeitskräfte: O(1)

$\frac{1}{\mathrm{Re}} : \quad \frac{\upsilon}{UL} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$ $>> \rightarrow$ Zähigkeit dominiert

$<< \rightarrow$ Trägheitskräfte dominieren

$\rightarrow 0$ Trägheitskräfte vernachlässigen $\rightarrow$ schleichende Strömung

$<$ Trägheit vorhanden
keine wahrnehmbaren Querbewegungen
$\rightarrow$ laminare Strömungen (exakte Lösung möglich

$\mathrm{Re} = \frac{\bar{u}D}{\upsilon} < 2300 \rightarrow$ Rohr- (laminare)
Strömung $\rightarrow$ nicht stabil

steigt Strömung schlägt um in turbulente Strömung (exakte Lösung nicht möglich)

$\rightarrow \infty$ Zähigkeitskraft vernachlässigbar, reibungsfreie Strömung als Grenzfall

$$\mathrm{Re} = \frac{\textit{Trägheitskräfte}}{\textit{Zähigkeitskräfte}}$$

technische Anwendung laminarer Strömung

das ebene Gleitlager

Strömungen in solchen Lagern von Maschinen sind Strömungen bei kleinen Reynolds-Zahlen!
$\rightarrow$ darf als laminar behandelt werden
[Bild]

Geometrie: $\frac{h(x)}{L} << 1$

Strömung: stationär, 2- dimensional
Fluid: inkompressibel, Newton'sch
Unterschied ,z. B., zur Couette- Strömung:
$\rightarrow$ obere Wand geneigt

$h = h(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0 \rightarrow$ keine entwickelte Strömung

Berechnung des Strömungsfeldes:

Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

x- Impuls: $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

y- Impuls: $u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

Vorgehen zur Vereinfachung der Gleichung:

vernachlässige kleine Terme $\rightarrow$ dimensionslose Formulierung

$\rightarrow$ Längenskalen:

$x \rightarrow L$

$y \rightarrow \overline{h}$ (z. B. am Eintritt x=0)

typische Geschwindigkeit:

x: $\rightarrow U$

y: $\rightarrow ?$

$x^*=\frac{x}{L}; y^*=\frac{y}{\overline{h}}; u^*=\frac{u}{U}; v^*=\frac{v}{V_{ref}}$

Konti.- Gleichung:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\frac{U}{L}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\frac{V_{ref}}{\overline{h}}=0$$

Forderung:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0$$

$$\Rightarrow V_{ref}=U\frac{\overline{h}}{L}$$

Impulsgleichungen

dafür Referenzdruck

$$p^*=\frac{p}{p_{ref}}$$

$$x=\frac{U^2}{L}u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{U^2}{L}v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{p_{ref}}{\rho L}+\upsilon\left(\frac{U}{L^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{U}{\overline{h}^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$\Rightarrow u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{p_{ref}}{\rho U^2}+\upsilon\frac{L}{U^2}U\frac{1}{\overline{h}^2}\left[\left(\frac{\overline{h}}{L}\right)^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right]$$

mit $\mathrm{Re}=\frac{uL}{\upsilon}\Rightarrow$

$$\Rightarrow u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{p_{ref}}{\rho U^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{L}{\overline{h}}\right)^2\left[\left(\frac{\overline{h}}{L}\right)^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right]$$

definiere reduzierte Re- Zahl

$$\mathrm{Re}'=\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{h}}{L}\right)^2<<1, \text{ da } \overline{h}<<L$$

$\Rightarrow$ Zähigkeitskräfte dominieren über Trägheitskräfte

ferner: in [ ] ist $\left(\frac{\overline{h}}{L}\right)^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}<<\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$

$\Rightarrow$ vereinfachter x- Impuls:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{p_{ref}}{\rho U^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{L}{\overline{h}}\right)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

bzw. dimensionsbehaftet

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{L}{\rho U^2} = \frac{\upsilon}{uL}\left(\frac{L}{\overline{h}}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\overline{h}^2}{U} \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ebenso für y- Impuls

auch hier ist der Trägheitseinfluss gering

$\rightarrow$ vereinfachte Form

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*}\frac{p_{ref}}{\rho U^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

über Re alleine Aussage über Größenordnung

$\rightarrow$ suche Aussage über Druck- und viskose Kräfte

anhand des x- Impulses:

da Beschleunigung (li. Seite) vernachlässigt $\Rightarrow$ Druck und viskose Kräfte im Gleichgewicht

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dimensionslose Formulierung

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{p_{ref}}{L} = \mu\frac{U}{\overline{h}^2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial y^{*2}}$$

dimensionslose Ableitungen

$= O(1)$

$$\Rightarrow p_{ref}\mu U\frac{L}{\overline{h}^2}$$

$\rightarrow$ in y- Impuls

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \left(\frac{\overline{h}}{L}\right)^2\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \;\rightarrow 0 \text{ für } \frac{\overline{h}}{L}\rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ p praktisch unabhängig von y in sehr engen Spalten

$\Rightarrow$ aus vereinfachtem x- Impuls

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = f(x)\right)$$

$$\frac{dp}{dx} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integration

$$y = 0; u = U$$

$$y = h(x); u = 0$$

RB: $\Rightarrow C_2(x) = U + f(x)$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\frac{U}{h(x)} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h(x)$$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsprofil

$$u(x,y) = U\left(1-\frac{y}{h(x)}\right) - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h(x)^2}{2}\frac{y}{h(x)}\left(1-\frac{y}{h(x)}\right)$$

Druckerverteilung im Lager bestimmen:

mit Hilfe des Volumenstroms $\dot{Q}$ durch das Lager (pro Einheitslänge)

$\dot{Q} = \int_0^h u\,dy$ dazu

$$\eta = \frac{y}{h(x)} \Rightarrow dy = h(x)d\eta$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = Uh(x)\underbrace{\int_0^1 (1-\eta)d\eta}_{1/2} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^3\underbrace{\int_0^1 \left(\eta-\eta^2\right)d\eta}_{1/6}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{Uh}{2} - \frac{1}{12\mu}\frac{dp}{dx}h^3 = const.$$

$\Rightarrow$ mit $\dot{Q} = const.$

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu\left(\frac{U}{2h(x)^2} - \frac{\dot{Q}}{h(x)^3}\right)\int_{x=0}^{x} dx$$

$$\Rightarrow p(x) - p_0 = 12\mu\left(\frac{U}{2}\int_0^x \frac{dx}{h(x)^2} - \dot{Q}\int_0^x \frac{dx}{h(x)^3}\right)$$

$p_0 = p(x=0); \dot{Q}$ noch unbekannt

bestimmen mit 2 RB

$$p(x=L) = p_0$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{U}{2}\frac{\int_0^L \frac{1}{h(x)^2}dx}{\int_0^L \frac{1}{h(x)^3}dx}$$

turbulente Strömungen

Instabilität führt zu Umschlag laminar- turbulent

Beispiel: Reynolds'scher Farbfadenversuch

[Bild]

Re_{krit} =2300 für Rohrströmung

Vermischung durch starke Schwankbewegungen quer zur Hauptströmungsrichtung $\Rightarrow$ Widerstand der Rohrströmung ist gegenüber laminarem Fall erhöht

zur Beschreibung turbulenter Strömungen

Reynolds'sche Gleichungen

Idee: beschreibe turbulente Strömungsgrößen durch (Reynolds-) Zerlegung in:

zeitlichen Mittelwert

Schwankungsgröße

z. B.: $u = \underbrace{\overline{u}}_{Mittelwert} + \underbrace{u'}_{Schwankung}$

$u = u(\vec{x},t)$

$\overline{u} = \overline{u}(\vec{x},t)$

$u' = u'(\vec{x},t)$

[Bild]

Messdaten von einem Ort im Strömungsfeld

Mittelwert $\overline{u}$:

$$\overline{u} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\overline{u} + u') dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u' dt + \overline{u}$$

$$\Rightarrow \overline{u}' = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u' dt = 0$$

$\Rightarrow$ Zeitmittel der Schwankungsgröße = 0

ebenso:

$$\left.\begin{aligned} v &= \overline{v} + v' \\ w &= \overline{w} + w' \\ p &= \overline{p} + p' \end{aligned}\right\} \text{Reynolds- Zerlegung}$$

Rechenregeln für Mittelung:

für Funktionen f und g

$$\underbrace{\overline{\overline{f}}}_{\substack{2-fache \\ Anwendung}} = \overline{f}$$

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{\overline{f} + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}$$

aber! $\overline{f \cdot g} \neq \overline{f} \cdot \overline{g}$!

einführen der Reynolds- Zerlegung in Erhaltungsgleichungen

dabei behandeln wir Newton'sche, inkompressible Fluide

Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Gleichung mitteln

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

folgt aus der ersten Formulierung bereits

in die 2. Formulierung ergibt

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Impulsgleichungen:

$$x \ldots \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \Delta u$$

erweitere mit

$$\underbrace{u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial uu}{\partial x}+v\frac{\partial uv}{\partial y}+w\frac{\partial uw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\Delta u$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\overline{u}+u')(\overline{u}+u')\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\overline{u}+u')(\overline{v}+v')\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(\overline{u}+u')(\overline{w}+w')\right]=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}-\upsilon\Delta\overline{u}+\upsilon\Delta u'$$

Zeitmittelung der gesamten Gleichung

bedenke dabei

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}=0;\frac{\partial \overline{u}'}{\partial t}=0$$

und z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{u}u'=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u}+\overline{u}'\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{u}\overline{u}'}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u}\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u}'\overline{v}'}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial \overline{u}\overline{w}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{u}'\overline{w}'}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\upsilon\Delta\overline{u}$$

$\Rightarrow$ Erweiterung rückgängig machen

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\upsilon\Delta\overline{u}-$$

$$\underbrace{-\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}}_{\substack{zusätzliche\_Spannungen\_inertialer\\ Natur\_addieren\_sich\_zu\_viskosen\\ Spannungen}}$$

Vergleich mit bekannter Impulsgleichung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$\Rightarrow$ z. B. $\tau_{xx}=\overline{\tau}_{xx}+\underbrace{\tau_{xx}'}_{\substack{turbulenter\\ Anteil}}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\overline{u'u'}$

die anderen Spannungskomponenten entsprechend

$\Rightarrow$ gesamter Gleichungssatz

Konti

Impuls (wobei y- und z- analog zur x-Richtung)

zusätzliche Spannungen

z. B.: $\tau_{xx}'=-\rho\overline{u'u'}$

und 5 weitere Spannungen heißen ‚Reynolds-Spannungen'

Gleichungssatz: Reynolds gemittelte Navier- Stokes-Gleichungen (Reynolds averaged Navier- Stokes-equations $\rightarrow$ RANS)

Reynolds'sche Spannungen sind zusätzliche Unbekannte $\Rightarrow$ Gleichungssatz nicht geschlossen $\Rightarrow$ Schließproblem
Turbulenzmodellierung zur Beschreibung der Reynolds-Spannungen durch Herstellung einer Verbindung zwischen Schwankungsbewegungen und gemitteltem Strömungsfeld.

Modellierung der turbulenten Spannungen

Der Prandtl'sche Mischungsweg Ansatz

Vorstellung: Turbulenzballen sind unter anderem quer zur Hauptströmung bewegt und tauschen Impuls aus

Ausgangspunkt für Beschreibung von τ_{xy} im ebenen Strömungsfeld

Annahme: es gibt Zusammenhang zwischen Schwankungsgrößen und dem mittleren Strömungsfeld

Postulat: (Boussinesq)

$\tau_{xy}' = \rho\varepsilon \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$; mit ε … ‚Wirbelviskosität' (eddy viscosity)

$\rightarrow$ keine Fluideigenschaft, sondern Strömungseigenschaft; im Allgemeinen abhängig vom Strömungszustand und vom Ort im Strömungsfeld $\rightarrow$ schlecht

Prandtl'sche Idee:

modelliere ε über Mischungsweg

[Bild]

Unterschied in Geschwindigkeit u:

$y \leftrightarrow y - l$

$$\Delta u_1 = \overline{u}(y) - \overline{u}(y-l) = \overline{u}(y) - \left(\overline{u}(y) + \left.\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right|_y (-l) + \ldots \right)$$

$$= l \frac{du}{dy}$$

analog: $y \leftrightarrow y + l$

$$\Delta u_1 = \overline{u}(y+l) - \overline{u}(y) = l \frac{d\overline{u}}{dy} \Rightarrow |\overline{u}'| = l \frac{d\overline{u}}{dy}$$

mit l … Mischungsweg der Turbulenzballen

y- Richtung (v')

gemäß folgender Vorstellung:

1. Fall

[Bild]

oberer Ballen gelangt zuerst am Level y an; dann unterer Ballen $\Rightarrow$ Ballen driften auseinander $\rightarrow$ Lücke wird durch y- Bewegung gefüllt

2. Fall

[Bild]

Kollision $\rightarrow$ Ausweichbewegung in y- Richtung entsteht

in beiden Fällen entsteht Geschwindigkeitsschwankung von u

man nimmt daher an, das

$|\overline{v}'| \approx |\overline{u}'|$, also $|\overline{v}'| = C_1 l \frac{d\overline{u}}{dy}; C_1 = const.$

weil Ballen mit größerem $\overline{u}$ mit $v < 0$ bewegt ist, aber in x- Richtung beschleunigt, und Ballen mit kleinerem $\overline{u}$ sich mit $v > 0$ bewegt und in x- Richtung ‚bremst'

$$\Rightarrow \overline{u'v'} \overset{setze}{=} -C_2|\overline{u'}||\overline{v'}| \Rightarrow \overline{u'v'} = -C_1C_2l^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

bzw., da l noch unbestimmt

C_1, C_2 in l^2 hineinpacken

$$\Rightarrow \tau_{xy}' = \rho l^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

damit Vorzeichenwechsel von τ_{xy}' und somit $\frac{d\overline{u}}{dy}$

$$\Rightarrow \tau_{xy}' = \rho l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right|\frac{d\overline{u}}{dy}$$

Vergleich mit Boussinesq

$$\varepsilon = l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right| \rightarrow \text{ reine Ortsfunktion}$$

Berechnung des wandnahen Geschwindigkeitsprofiles

Ausgangspunkt

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = \left(\upsilon + l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right|\right)\frac{d\overline{u}}{dy}$$

Prandtl- Annahme

$\tau_{xy} = const.$ in y- Richtung und insbesondere

$= \tau_w = \tau_{xy}\big|_{const.}$

dimensionslos machen mit typischen Größen

$$U^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau}$$

$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ … Schubspannungsgeschwindigkeit

$$y^+ = \frac{yu\tau}{\upsilon} \Leftrightarrow 1 = \left(1 + l^2\left|\frac{du^+}{dy^+}\right|\right)\frac{du^+}{dy^+}$$

betrachte nur $\frac{du^+}{dy^+} > 0$

löse auf nach $\frac{du^+}{dy^+}$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{u}}{dy} = -\frac{1}{2l^{+^2}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2l^{+^2}}\right)^2 + \frac{1}{l^{+^2}}}$$

formuliere um

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1+\sqrt{1+4l^{+^2}}}dy$$

$$\Rightarrow u^+ = \int_{y^+=0}^{y^+} \frac{2}{1+\sqrt{1+4l^{+^2}}}dy^+$$

Prandtl- Ansatz

$$l^+ = \kappa y^+$$

Integral lösen

1. sehr randnahe Schichten, y^+ klein

$$\Rightarrow ul^{+^2} << 1$$

$$\Rightarrow u^+ = \int_0^{y^+} dy^+ = y^+ \rightarrow u^+ = y^+$$

praktisch gültig bei $y^+ \leq 5$

viskose Unterschicht

2. y^+ nicht klein (≥ 26)

$1 << 4l^{+^2}$ und auch

$1 << 2l^{+^2}$

$$\Rightarrow u^+ = \int \frac{1}{l^+}dy^+ = \int \frac{dy^+}{\kappa y^+} =$$

$$= \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + \underbrace{B}_{Integrationskons\tan te}$$

$$\left.\begin{array}{l}\kappa = 0{,}41\\ B = 5{,}0\end{array}\right\}\text{ aus Experimenten}$$

$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B$ ... log. Wandgesetz

für $y^+ \geq 26 \rightarrow$ Gebiet entwickelter Turbulenz

exakte Lösung der Navier- Stokes- Gleichung

a. ebene Druck- Schlepp- Strömung

[Bild]

Strömung eines inkompressiblen, Newton'schen Fluids, angetrieben durch Druckgefälle und bewegte obere Platte.

Beschreibung durch Grundgleichungen:

Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Impuls:

x ... $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f_x^B$

y ... $\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + f_y^B$

Annahme:

Strömung stationär

Strömung sei entwickelt (Ableitung in Strömungsrichtung der Geschwindigkeit = 0)

[Bild]
Wände für Fluid undurchlässig
vernachlässige Massenkräfte
$\Rightarrow$ vereinfachte Gleichungen

Konti: $\frac{dv}{dy} = 0$

Impuls:

$$\text{x} \ldots\ v\frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\text{y} \ldots\ v\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \upsilon\frac{d^2v}{dy^2}$$

da Wände undurchlässig $\rightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ y = h \end{matrix} \rightarrow v = 0$

da $\begin{matrix} \frac{dv}{dy} = 0 \\ v \neq f(y) \end{matrix} \rightarrow v \equiv 0$ im gesamten Strömungsfeld

$\Rightarrow$ vereinfachte Impulsgleichungen

$$\text{x} \ldots\ 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\text{y} \ldots\ 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

aus y- Impulsgleichung: $p \neq f(y)$
aus x- Impulsgleichung:

da $u \neq f(x)$ (entwickelte Strömung) $\rightarrow$ auch $\frac{d^2u}{dy^2} \neq f(x)$

$\rightarrow$ auch $\frac{\partial p}{\partial x} \neq f(x) \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = const. \rightarrow$

es bleibt zu lösen:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \underbrace{\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}}_{=const.};\ \upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$

$\rightarrow$ integrieren $\rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y + C_1 \rightarrow$

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$$

Konstanten aus RB bestimmen

$$\begin{matrix} u = 0 \\ u = U \end{matrix}\ \text{bei}\ \begin{matrix} y = 0 \\ y = h \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C_2 = 0 \\ C_1 = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h + \frac{U}{h} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsprofil

$$u(y) = U\frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h^2\left(\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right)$$

Spezialfall:

Strömung ohne Druckgradient

$$\frac{dp}{dx}=0$$

$$\Rightarrow u(y)=U\frac{y}{h}$$ ... Couette- Strömung

[Bild]

Strömung ohne Plattenbewegung

$$\Rightarrow u(y)=-\frac{1}{2\mu}\underbrace{\frac{dp}{dx}}_{<0}h^2\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

[Bild]

allgemein: Druck- Schlepp- Strömung

[Bild]

b. Hagen- Poiseulle- Rohrströmung

Strömung eines inkompressiblen, Newton'schen Fluids durch ein gerades, zylindrisches Rohr mit Kreisquerschnitt

Anordnung:

[Bild]

Rohr unendlich lang; keine Einlaufeffekte

Strömung stationär und rotationssymmetrisch

Grundgleichungen in Zylinderkoordinaten entsteht durch Koordinatentransformation

Konti: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial u}{\partial z}=0$

Impuls:

x ... $v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+u\frac{\partial v_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+f_r^B$

y ... $v_r\frac{\partial u}{\partial r}+u\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+f_z^B$

Annahmen:

Strömung entwickelt

Wände undurchlässig

Massenkräfte vernachlässigt

Konti: $rv_r=const.$

insbesondere $Rv_r\big|_{r=R}=0\ \rightarrow\ v_r\equiv 0$ für gesamtes Strömungsfeld

Impuls:

y ... $0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\rightarrow p\neq f(r)$

z ... $0=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)\right]\rightarrow\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}$

weil $u\neq f(z)\Rightarrow\frac{dp}{dz}\neq f(z)\rightarrow$ da auch $p\neq f(r)\Rightarrow\frac{dp}{dz}=const.$

Lösung der DGl für $u(r)$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}r = \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)\bigg|\int \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + C_1 = r\frac{du}{dr}\bigg|: r \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}r + \frac{C_1}{r} = \frac{du}{dr}\bigg|\int \quad \rightarrow$$

$$u(l) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Konstanten aus RB

bei $r = R \rightarrow u = 0$

Regularität $r = 0: \frac{du}{dr} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

RB bei $r = R$ ergibt $C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsprofil

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \rightarrow \text{ parabolisch}$$

zum Volumenstrom äquivalente Geschwindigkeit

$$\overline{u} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u(r)2\pi r dr = ... = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2$$

da $U_{\max} = u(r=0) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2 \Rightarrow \overline{u} = \frac{U_{\max}}{2}$

[Bild]

$$\dot{Q} = \overline{u}\,\pi R^2 = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^4$$

Turbulenzmodellierung

Prandtl'scher Mischungsweg- Ansatz: begrenzt auf große Re- Zahlen

Allgemeines zur Modellierung turbulenter Strömungen:

2 Klassen von Modellen:

1. Wirbelviskositätsmodelle
   - Nullgleichungsmodelle
     - keine zusätzliche DGl
   - Eingleichungsmodelle
     - eine zusätzliche DGl zur Bestimmung der Unbekannten
   - Zweigleichungsmodelle
     - zwei zusätzliche DGl, z. B. κ,ε - Modell: löst Transportgleichungen für turbulente kinetische (κ) Energie und Dissipationsenergie (ε)
2. Reynolds- Spannungs- Modelle (RSM)

Berechnung turbulenter Rohrströmungen mit der erweiterten Bernoulli- Gleichung

[Bild]

a. Betrachtungen zur Schubspannung aus Navier- Stokes- Gleichungen

z- Impuls: für stationäre, entwickelte, rotationssymmetrische Strömung eines inkompressiblen Fluids

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\tau_{rz}\right) \Rightarrow r\frac{dp}{dz} = \frac{d}{dr}\left(r\tau_{rz}\right) \Rightarrow$$

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} + \frac{C}{r} \rightarrow C = 0 \text{ da } \tau_{rz} \text{ beschränkt bei } r = 0$$

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2}\frac{dp}{dz}$$

Verlauf der Schubspannung

[Bild]

$$\tau_{rz} = \tau_{viskos} + \tau_{turb.} = \tau_{viskos} + \rho \cdot \overline{u'r \cdot u'z}$$

Wandschubspannung sehr wichtig

$$\tau_{rz}(r = R) = \tau_w = \frac{R}{2}\frac{dp}{dz} = \frac{R}{2}\frac{p_2 - p_1}{L}$$

Achtung! In der Regel $\tau_w = \left|\tau_{rz}(r = R)\right|$, daher

$$\tau_w = \frac{R}{2}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

b. Geschwindigkeitsprofil

bei laminarer Strömung (Hagen- Poiseulle- Strömung)

$$\frac{u(r)}{U_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

turbulente Strömung: logarithmisches Wandgesetz

Nikaredse hat herausgefunden, das das logarithmische Wandgesetz bis an die Rohrachse die Profile gut wiedergibt.

Geschwindigkeitsprofil darstellbar als

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + \beta\,;\ \begin{matrix}\kappa = 0{,}41 \\ \beta = 5\end{matrix}\,;\ y^+ \text{ ... dimloser Wandabstand}$$

für die Position auf der Rohrachse

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln R^+ + \beta\,;\ R^+ = \frac{Ru_\tau}{\upsilon}$$

Subtraktion

$$\frac{U_{\max} - \bar{u}(r)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{R}{y} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{R}{R - r}$$

$$\frac{\bar{u}(r)}{U_{\max}} = 1 - \frac{1}{U^+_{\max}}\frac{1}{\kappa}\ln\frac{R}{R - r}$$

[Bild]

Turbulente Strömungen haben vollere Geschwindigkeitsprofile als laminare!

Berechnen der volumenstromäquivalenten Geschwindigkeit $\bar{u}$

mit $u(r) = U_{\max} + \frac{u_\tau}{\kappa}\ln\frac{R - r}{R}$

$$\bar{u}\pi R^2 = \int_0^R 2\pi r dr \bar{u}(r) \Rightarrow \bar{u} = \frac{2}{R^2}\int_0^R u(r) r dr$$

Substitution: $\begin{matrix}\eta = R - r \\ dr = -d\eta\end{matrix}$

$$\overline{u} = U_{\max} - \frac{2}{R^2}\frac{u_\tau}{\kappa}\int_{\eta=R}^{0}(R-\eta)\ln\frac{\eta}{R}d\eta = U_{\max} - 3{,}75u_\tau$$

$$\Rightarrow \frac{U_{\max}-\overline{u}}{U_{\max}} = \frac{3{,}75}{\frac{1}{\kappa}\ln R^+ + \beta}$$

z. B. $R^+ = 1000 \rightarrow \frac{U_{\max}-\overline{u}}{U_{\max}} = 0{,}168 \rightarrow$ Maximalwert von $\overline{u}(r)$ unterscheidet sich nur geringfügig $\Rightarrow$ Profil durch $\overline{u}$ gut wiedergegeben

[Bild]

dieser Ansatz fußt auf dem logarithmischen Wandgesetz, daher nur gültig für sehr große Reynolds- Zahlen

empirisch fand man: $\frac{\overline{u}(y)}{U_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}$

gibt Profile auch für nicht so große Re- Zahlen wieder. Dann ist aber $n = f(\text{Re})$

Re	4000	2,3x10^4	1,1x10^5	2x10^6	3,2x10^6
n	6	6,6	7	10	10
$\overline{u}/U_{\max}$	0,791	0,807	0,817	0,865	0,865

wobei analytisch: $\frac{\overline{u}}{U_{\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$ (aus Profil)

[Bild]

In weiten Re- Zahlenbereichen wird dieses Profil gut wiedergegeben durch n=7 $\rightarrow$ „1/7- Potenzgesetz“

c. Berechnung des Widerstandsverhaltens

ausgehend von der Energiegleichung (stationär; e=const.)

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\left(\rho\frac{\vec{v}^2}{2}\right) =$$
$$\rho\vec{v}\vec{f}^B - (\vec{v}\vec{\nabla})p +$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) +$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) +$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz})$$

Annahme: $\vec{f}^B = -\vec{\nabla}(gz)$ und bezeichne

$$\dot{q}_{viskos} = -\frac{\partial}{\partial x}(...) - \frac{\partial}{\partial y}(...) - \frac{\partial}{\partial z}(...)$$

$$\left(\vec{v}\nabla\right)\left(p+\frac{\rho\vec{v}^{2}}{2}+\rho gz\right)=-\dot{q}_{viskos}=$$

$$\frac{d}{dt}\left(p+\frac{\rho\vec{v}^{2}}{2}+\rho gz\right)\Bigg|\int_{1}^{2}\begin{matrix}l\ddot{a}ngs\\ Teilchenbahn\end{matrix}\rightarrow$$

$$\left(p+\frac{\rho\vec{v}^{2}}{2}+\rho gz\right)_{2}+\int_{1}^{2}\dot{q}_{viskos}dt=\left(p+\frac{\rho\vec{v}^{2}}{2}+\rho gz\right)_{1}$$

Term $\int_{1}^{2}\dot{q}_{viskos}dt$ stellt Verluste dar (Unterschied zur reibungsfreien Bernoulli- Gleichung)

Beispiel: Hagen- Poiseulle- Strömung

[Bild]

$u_1 = u_2$ für alle r; keine Unterschiede in der potentiellen Energie

$$\rightarrow p_2 - p_1 = -\int_{1}^{2}\dot{q}_{viskos}dt$$

wir hatten gesehen, das

$$-\frac{p_2-p_1}{L}=-\frac{dp}{dz}=\lambda\frac{1}{D}\frac{\rho}{2}\overline{u}^{2}$$

$$\rightarrow\int_{1}^{2}\dot{q}_{viskos}dt=\underbrace{\lambda\frac{L}{D}}_{\xi}\frac{\rho}{2}\overline{u}^{2};$$

ξ ... Verlustkoeffizient (aus Tabellen, z. B. Idelchik, Handbook of hydraulic resistance)

Idee: bei turbulenter Strömung genau so machen

$$\rightarrow\int_{1}^{2}\dot{q}_{viskos}dt=\xi\frac{\rho}{2}\overline{u}^{2}=\underbrace{p_v}_{Druckverlust}$$

$\rightarrow$ erweiterte Bernoulli- Gleichung

$$\left(p+\frac{\rho\vec{v}^{2}}{2}+\rho gz\right)_{2}+\xi\frac{\rho}{2}\overline{u}^{2}=\left(p+\frac{\rho\vec{v}^{2}}{2}+\rho gz\right)_{1}$$

Abhängigkeit des Verlustdruckes von $\overline{u}$

für laminare Strömungen

$$\xi=\lambda\frac{L}{D}=\frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{L}{D}$$

$$p_v=\xi\frac{\rho}{2}\overline{u}^{2}=\frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\overline{u}^{2}\Rightarrow$$

$$p_v=\frac{32\mu L}{D^2}\overline{u}\rightarrow \text{Abhängigkeit linear}$$

für turbulente Strömung

aus Experimenten bekannt, das $p_v \approx \overline{u}^2$, weil λ über weite Re- Zahlenbereiche konstant

ferner kann τ_w ermittelt werden durch

$$\tau_w=\frac{R}{2}\frac{p_1-p_2}{L}=\frac{R}{2}\lambda\frac{1}{D}\overline{u}^{2}=\frac{\lambda}{8}\rho\overline{u}^{2}$$

Widerstand von Rohrströmungen ist charakterisiert durch die Rohrreibungszahl λ ($\xi = \lambda \frac{L}{D}$)

- Abhängigkeit von λ
  - Rohrwandung ist in Wechselwirkung mit dem Fluid.
  - Widerstand ist bestimmt
    - durch den Strömungszustand (Re- Zahl)
    - durch die Rauhigkeit der Rohrwand
      - [Bild]
      - u_s charakterisiert die Rauhigkeit – „äquivalente Sandrauhigkeit“ $\Rightarrow$

        $$\lambda = \lambda(\mathrm{Re}, \frac{u_s}{D})$$
  - außerdem durch Strömungsform
    - laminar: kein Rauhigkeitseinfluss
      - Widerstandsgesetz

        $$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}; \mathrm{Re} = \frac{\bar{u}D}{\nu}$$; gültig für Re<2300
    - turbulent: Rauhigkeit kann Einfluss haben
      - man unterscheidet:
        - glatte Rohre: Rauhigkeit sehr gering, insbesondere $\frac{u_s u_\tau}{\nu} << 5$
- Blasius: Widerstandsgesetz
  - $\lambda = 0{,}3164\,\mathrm{Re}^{-14}$ gilt für $\mathrm{Re} \le 10^5$
  - Druckverlust proportional zu $\bar{u}^{7/4}$
- für $\mathrm{Re} > 10^5$: Prandtl'sches Widerstandsgesetz (aus log. Wandgesetz)

  $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8$$

rauhe Rohre

- $0 \le \frac{u_s u_\tau}{\nu} \le 5$
  - Rauhigkeit liegt in der laminaren Unterschicht
  - Impulstransport aus turbulentem Bereich zu Wand nicht
    - beeinflußt $\rightarrow$ „hydraulisch glatte Rohre“
- $5 \le \frac{u_s u_\tau}{\nu} \le 26$
  - Übergangsbereich von u_s!
  - Beeinflussung des Widerstandes durch u_s ist vorhanden (Rauhigkeitselemente vergrößern Impulstransport)
- $\frac{u_s u_\tau}{\nu} > 26$
  - vollkommen rauhe Rohre; alle Rauhigkeitselemente ragen aus der laminaren Unterschicht heraus $\rightarrow$ Vergrößerung des Widerstandes

Formwiderstand: $\lambda = \lambda(u_s / D)$

Widerstandsgesetz von Karman

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}74 - 2\log\frac{u_s}{R}$$

weitest gültiges Widerstandsgesetz (Colebrook & White)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}74 - 2\log\left(\frac{u_s}{R} + \frac{18{,}7}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \rightarrow$$ gilt von „hydraulisch glatt" bis „vollkommen rauh"

Strömung durch Diffusoren

Zweck: Druckrückgewinn oder Strömungsverlangsamung $\rightarrow$ Querschnittserweiterung

[Bild]

Strömung ist verlustbehaftet durch Ablösung

ein Maß für einen Widerstandskoeffizienten ξ ist hier der Diffusorwirkungsgrad η

$$\eta = \frac{(p_2 - p_1)_{real}}{(p_2 - p_1)_{ideal}}$$

idealer Fall (ohne Verluste)

$$p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}u_2^2$$

Konti: $u_1 A_1 = u_2 A_2$

$$\rightarrow (p_2 - p_1)_{ideal} = \frac{\rho}{2}u_1^2\left[1 + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow (p_2 - p_1)_{real} = \eta\frac{\rho}{2}u_1^2\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]$$

erweiterte Bernoulli- Gleichung besagt

$$p_2 + \frac{\rho}{2}u_2^2 + \xi_D\rho\frac{u_1^2}{2} = p_1 + \rho\frac{u_1^2}{2}$$ ... real

$$\xi_D = (1 - \eta)\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]$$

η aus Tabellen; am höchsten bei $5° \leq \delta \leq 10°$

Grenzschichten

[Bild]

Fluid wird von U_∞ auf 0 bei Annäherung an die Kanten verzögert

[Bild]

betrachte Strömung mit sehr großen Re- Zahlen

da $\mathrm{Re} = \dfrac{Trägheitskräfte}{Zähigkeitskräfte} \Rightarrow$ Zähigkeitseinfluß offenbar gering $\rightarrow$

Potentialströmung

$$\mathrm{Re} = \frac{uL}{\nu}$$

Geschwindigkeit in Wandnähe klein, Geschwindigkeitsgradienten aber groß $\rightarrow$ viskose Kräfte haben dort Bedeutung

Modellvorstellung

In einer dünnen Schicht längs der Körperkanten sind die Zähigkeitskräfte bedeutend $\rightarrow$ diese Schicht wird Grenzschicht genannt. Außerhalb der Grenzschicht herrscht Potentialströmung.

1. Grenzschichtgleichung für ebene Schichtenströmung

ausgehend von den Navier- Stokes- Gleichungen für ein Newton'sches, inkompressibles Medium

Konti: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

Impuls:

$$\text{x ...}\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\text{y ...}\quad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

vereinfachen der Gleichungen durch Größenordnungsbetrachtung

Annahme: Dicke der Grenzschicht $\delta << L$

$$\frac{\delta}{L}=\varepsilon<<1$$

Allgemeines zu Größenordnungen

a. Begriff der Größenordnung

Aussage zu „Kleinheit“ oder „Größe“ nur sinnvoll relativ zu einer Bezugsgröße

$\rightarrow$ Gleichungssystem mit Bezugsgrößen dimensionslos machen

definiere dazu:

$$x^*=\frac{x}{L};y^*=\frac{y}{L};p^*=\frac{p}{\rho U_\infty^2};t^*=\frac{tU_\infty}{L};u^*=\frac{u}{U_\infty};v^*=\frac{v}{U_\infty}$$

Größenordnung einer Variablen ist Faktor, um den die Variable von der Bezugsgröße abweichen kann

betrachte damit Strömung an einer ebenen Platte

[Bild]

$x\le L\rightarrow x^*=\frac{x}{L}\approx O(1)$ ... größte mögliche Ordnung im Strömungsfeld

$$y^*=\frac{y}{L}=\frac{y}{\delta}\frac{\delta}{L}\rightarrow\frac{y}{\delta}\approx O(1);\frac{\delta}{L}\approx O(\varepsilon)\rightarrow y^*\approx O(\varepsilon)$$

$$u^*=\frac{u}{U_\infty}\approx O(1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\approx\frac{\Delta u^*}{\Delta x^*}\approx\frac{O(1)}{O(1)}\approx O(1)$$

b. Addition und Multiplikation von Größenordnungen

bei Addition mehrerer (aber nicht beliebig vieler) Summanden ist die Summe von der Größenordnung des größten Terms

bei Multiplikation hat das Produkt die Ordnung des Produktes der Größenordnungen

z. B.: $O(1)\cdot O(\varepsilon)=O(\varepsilon)$

c. Größenordnungen in Gleichungen

In Gleichungen müssen Größenordnungen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich groß sein
In einzelnen Termen kann nicht eine die andere Größenordnung übertreffen.

Konti: $\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0$

wir wissen das $\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\approx O(1)$ somit $\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\approx O(1)$ da

$y^*\approx O(\varepsilon)\Rightarrow \Delta y^*\approx O(\varepsilon)\Rightarrow \Delta v^*\approx O(\varepsilon)$

$\Rightarrow \Delta v^*$ klein in der Grenzschicht, ebenso v^*

dimensionsloser x- Impuls:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-^{*}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\approx O(1)O(1)\approx O(1)$$

$$v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\approx O(\varepsilon)\frac{O(1)}{O(\varepsilon)}\approx O(1)$$

$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}$ hat in einer instationären Strömung die gleiche Bedeutung wie konvektive Terme $\rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial t^*}\approx O(1)$

$\frac{\partial p^*}{\partial x^*}$: Gleichungen gelten auch für den Rand der Grenzschicht, dort ist kein Reibungseinfluß mehr zu erwarten $\rightarrow$ Druckterm hält der Beschleunigung das Gleichgewicht $\Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\approx O(1)$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\approx\frac{\Delta\frac{\partial u^*}{\partial x^*}}{\Delta x^*}\approx\frac{O(1)}{O(1)}\approx O(1)$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\approx\frac{\Delta\frac{\partial u^*}{\partial y^*}}{\Delta y^*}\approx\frac{O(1/\varepsilon)}{O(\varepsilon)}\approx O(1/\varepsilon^2)$$

zusammengefaßt

$$\underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial t^*}}_{O(1)}+\underbrace{u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}}_{O(1)}+\underbrace{v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}}_{O(1)}=-^{*}\underbrace{\frac{\partial p^*}{\partial x^*}}_{O(1)}+\underbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}}_{?}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}}_{O(1)}+\underbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}}_{O(1/\varepsilon^2)}\right)$$

da diese Gleichung erfüllbar sein muß, muß gefordert werden

$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\approx O(1)\Rightarrow\frac{1}{\mathrm{Re}}\approx O(\varepsilon^2)\rightarrow$ paßt zu Vorraussetzung großer Re- Zahlen da $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ folgt $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \Rightarrow$ große Re- Zahlen bedeuten wirklich dünne Grenzschichten

dimensionsloser y- Impuls

$$\underbrace{\frac{\partial v^*}{\partial t^*}}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*}}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}}_{O(\varepsilon)} = \underbrace{-^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*}}_{?} + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}}_{O(\varepsilon^2)} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}}_{O(1/\varepsilon)} \right)$$

führende Ordnung ist $\varepsilon \Rightarrow$ auch der Druckterm $\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \approx O(\varepsilon)$, da sonst Gleichung nicht erfüllbar

$\Rightarrow$ Druckgradient normal zur Wand, klein von $O(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ näherungsweise zu null gesetzt

Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned}}$$

Druck in der Grenzschicht ist mit y unveränderlich $\rightarrow$ hat den Wert am Rand der Grenzschicht $\rightarrow$ ist durch Potentialströmung aufgeprägt

gehorcht der Gleichung (stationärer Fall)

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

bei ebener Platte: $u(x) = U_\infty \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$