Lineare Algebra I,II (Satze und Denitionen)

Martin Ziegler

Freiburg WS 93/94, SS 94[1]

[1] Version 4, 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der n-dimensionale euklidische Raum

1.1 Lineare Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* (uber $\mathbb{R}$) ist ein Ausdruck der Form

$$ {}_1x_1 + \ldots + \ {}_nx_n = \ , $$

fur reelle Zahlen $\ _i$ und . Eine *Losung* ist ein n-Tupel

$$ (\ _1, \ldots, \ _n) $$

von reellen Zahlen, das die Gleichung erfullt.

Ein *lineares Gleichungssystem* G (in n Variablen) ist ein System

$$
\begin{array}{ccccccc}
{}_{11}x_1 & + & & + & {}_{1n}x_n & = & {}_1 \\
 & & \vdots & & & & \\
 & & \vdots & & & & \\
{}_{m1}x_1 & + & & + & {}_{mn}x_n & = & {}_m
\end{array}
$$

von linearen Gleichungen. In Kurzform

$$ \sum_{j=1}^{n} \ {}_{ij}x_j = \ {}_i \quad (i = 1, \ldots, m). $$

Die *Losungsmenge* von G ist

$$ \mathrm{L}(G) = \left\{ (\ _1, \ldots, \ _n) \mid \ _1, \ldots \ _n \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} \ {}_{ij} \ {}_j = \ {}_i \quad (i = 1, \ldots, m) \right\} $$

,

G heit *homogen*, wenn alle $\ _i$ gleich Null sind, und *quadratisch*, wenn $m = n$.

Eine *Zeilenoperation* macht aus G ein neues Gleichungssystem durch

Z_i Multiplikation der i–ten Zeile mit einer Zahl $\ \neq 0$

$Z_{i,j}$ Addieren des –fachen der i–ten Zeile zur j–ten Zeile ($i \neq j$).

Lemma 1.1.1 *Ein Gleichungssystem, das aus G durch Zeilenoperationen hervorgeht, hat die gleichen Losungen wie G.*

Ein Gleichungssystem G' ist in *Normalform* , wenn es die Gestalt

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & & & + & {}_{1,k+1}x_{k+1} & + & & {}_{1,n}x_n & = & {}_1 \\
& x_2 & & + & {}_{2,k+1}x_{k+1} & + & & {}_{2,n}x_n & = & {}_1 \\
& & \ddots & & & & \vdots & & & \vdots \\
& & x_k & + & {}_{k,k+1}x_{k+1} & + & & {}_{k,n}x_n & = & {}_k \\
& & & & & & & 0 & = & {}_{k+1} \\
& & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & 0 & = & {}_m
\end{array}
$$

hat. k heit der *Rang* von G'. Beachte, da $0 \quad k \quad \min(m,n)$. Wenn ${}_{k+1} = \ldots = {}_m = 0$, ist die Losungsmenge

$$\{({}_1 \quad {}_{1,k+1} \ {}_{k+1} \quad {}_{1,n} \ {}_n, \ldots, {}_k \quad {}_{k,k+1} \ {}_{k+1} \quad {}_{k,n} \ {}_n, \ {}_{k+1}, \ldots, {}_n) \mid {}_{k+1}, \ldots, {}_n \in \mathbb{R}\}$$

$(n \quad k)$-*parametrig.*

Lemma 1.1.2 *Jedes lineare Gleichungssystem lat sich durch Zeilenoperationen und Vertauschung von Variablen in Normalform bringen.*

Folgerung 1.1.3 *Sei k der Rang des in Normalform gebrachten Gleichungssystems G, m die Zahl der Gleichungen und n die Zahl der Variablen. Dann ist* $\mathrm{L}(G)$ *leer oder $(n \quad k)$-parametrig. Wenn $k = m$, gibt es immer eine Losung. Wenn $k = n$, gibt es hochstens eine Losung.*

Folgerung 1.1.4 *Ein Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen hat keine oder unendlich viele Losungen.*

1.2 Der $\mathbb{R}^n$

Das *Produkt* $X_1 \quad \ldots \quad X_n$ einer Folge von Mengen ist die Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i (i = 1, \ldots, n)\}$$

aller n–Tupel, deren i–te Komponente aus X_i ist. X^n ist das n–fache direkte Produkt von X.

$$\mathbb{R}^n = \{({}_1, \ldots, {}_n) \mid {}_1, \ldots, {}_n \in \mathbb{R}\}$$

ist der *n-dimensionale euklidische Raum.*

Spezialfalle:	$\mathbb{R}^0$	wird als der *Nullraum* $\mathbf{0} = \{0\}$ vereinbart.
	$\mathbb{R}^1$	sind die reellen Zahlen selbst.
	$\mathbb{R}^2$	ist die euklidische Ebene.

Je nach Zusammenhang heien die Elemente des $\mathbb{R}^n$ Punkte oder Vektoren.

Vektoren konnen addiert und mit reellen Zahlen (Skalaren) multipliziert werden. Seien $a = ({}_i)$ und $b = ({}_i)$ Vektoren und $\in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a + b &= (\ _i + \ _i) \\ a &= (\quad _i). \end{aligned}$$

Mit 0 bezeichnen wir den *Nullvektor* $(0, \ldots, 0)$.

Lemma 1.2.1 *Es gelten die folgenden Rechenregeln.*

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$

2) $x + 0 = 0 + x = x$

3) Zu jedem x *gibt es ein* y *mit* $x + y = 0$.

4) $x + y = y + x$

5) $\ (x + y) = x \ + y$

6) $(\ + \ )x = x \ + x$

7) $\ (x \ ) = (\quad)x$

8) $1x = x$

1.3 Geraden und Ebenen

Denition *Eine (ane) Gerade* g *in* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Menge der Form*

$$\{a + v \ \mid \ \in \mathbb{R}\} = a + \mathbb{R}v,$$

wobei $v \neq 0$.

Der *Richtungsraum* $\mathbb{R}v$ ist durch g eindeutig bestimmt.

Lemma 1.3.1 *Zwei Geraden* $a + \mathbb{R}v$ *und* $b + \mathbb{R}w$ *sind genau dann gleich, wenn* $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ *und* $a \quad b \in \mathbb{R}v$.

Lemma 1.3.2 *Durch zwei verschiedene Punkte des* $\mathbb{R}^n$ *geht genau eine Gerade.*

Denition *Zwei Geraden heien* parallel, *wenn sie die gleichen Richtungsraume haben.*

Verschiedene parallele Geraden konnen sich nicht schneiden.

Denition *Zwei Vektoren* v *und* w *heien* linear abhangig, *wenn einer von beiden null ist oder wenn* v *ein Vielfaches von* w *ist, das heit, wenn* $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$.

Denition *Eine ane Ebene* E *ist eine Menge der Form* $a + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$, *fur linear unabhangige* v *und* w.

Der Richtungsraum $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ ist durch E eindeutig bestimmt.

Lemma 1.3.3 *Zwei nicht parallele Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich.*

1.4 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $a = (\ _i)$ und $b = (\ _i)$ ist

$$ab = \ _1\ _1 + \dots\ _n\ _n.$$

Lemma 1.4.1 *Das* Skalarprodukt *ist eine symmetrische, positiv–denite Bilinearform . Das heit*

$(a + b)c = ac + bc$ *und* $a(b + c) = ab + ac$

$(a\ )b = a(b\ ) = \ (ab)$

$ab = ba$

$a^2\ \ 0$

$a^2 = 0$ *gdw.* $a = 0$.

Denition *Die Norm oder Lange von a ist*

$$\|a\| = \sqrt{a^2}.$$

Denition *Der Winkel zwischen zwei nicht-trivialen Vektoren ist deniert durch* 0 *und*

$$\cos(\ ) = \frac{ab}{\|a\|\|b\|}$$

.

Lemma 1.4.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$|ab|\ \ \|\ \ a\|\|b\|$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn a und b linear abhangig sind.

Lemma 1.4.3 (Dreiecksungleichung)

$$\|a + b\|\ \ \|\ \ a\| + \|b\|$$

1.5 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to\ \ \mathbb{R}$ heit *linear*, wenn fur reelle Zahlen $\ _1, \dots,\ _n$

$$f(\ _1, \dots,\ _n) = \ _1\ _1 + \dots + \ _n\ _n.$$

f heit auch *Linearform.* Fur die *kanonischen* Basisvektoren $e_i = (\ _1, \dots,\ _n)$, wobei

$$_j = \begin{array}{ll} 0 & \text{, wenn } j \neq i \\ 1 & \text{, wenn } j = i, \end{array}$$

gilt $f(e_i) = \ _i$. Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m)$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ heit *linear*, wenn alle Komponenten $f_i : \mathbb{R}^n \to\ \ \mathbb{R}$ linear sind. $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, die Menge der linearen Abbildungen ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum unter wertweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren.

Eine m-n–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} {}_{11} & {}_{12} & & {}_{1n} \\ {}_{21} & {}_{22} & & {}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_{m1} & {}_{m2} & & {}_{mn} \end{pmatrix}$$

ist eine mit Zahlenpaaren aus $\{1 \ldots m\}$ $\{$ $1 \ldots n\}$ indizierte Familie $(\ {}_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$. Mit elementweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren bildet die Menge $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ der m-n–Matrizen einen $\mathbb{R}$–Vektorraum. 1-n–Matrizen heien *Zeilenvektoren*, m-1–Matrizen *Spaltenvektoren*.

Spezielle Matrizen: $\mathbf{0}$ ist die m-n–Matrix, deren Elemente Nullen sind. Die *Einheitsmatrix* $\mathbf{I}$ ist die m-m–Matrix $(\ {}_{ij})$, wobei ${}_{ij} = \begin{matrix} 0 & \text{wenn} & i \neq j \\ 1 & \text{sonst} & \end{matrix}$. (Man nennt ${}_{ij}$ "Kroneckers Delta".) Eine n-n–Matrix heit *quadratisch*. Wir schreiben $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ fur $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Denition *Das Produkt* $C = (\ {}_{hj})$ *einer* l-m–*Matrix* $A = (\ {}_{hi})$ *und einer* m-n–*Matrix* $B = (\ {}_{ij})$ *ist eine* l-n–*Matrix deniert durch* ${}_{hj} = \sum_{i=1}^{m} \ {}_{hi} \ {}_{ij}$.

Eine m-n–Matrix A deniert eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f_A(\ {}_1, \ldots, \ {}_n) = (\sum_{j=1}^{n} \ {}_{1j} \ {}_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \ {}_{mj} \ {}_j).$$

f_0 ist die Nullabbildung, f_I die identische Abbildung.

Satz 1.5.1

$$f_A \quad f_B = f_{AB}$$

Folgerung 1.5.2 *Das Matrizenprodukt ist assoziativ und bilinear. Es gilt* $\mathbf{0}A = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *und* $\mathbf{I}A = A\mathbf{I} = A$.

Spaltenvektoren A entsprechen linearen Abbildungen $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, die wiederum gegeben sind durch den Vektor $a = f_A(1)$. Das liefert eine Entsprechung der Elemente von $\mathrm{M}_{1,m}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^m$. Hierbei entspricht der Vektor $f_B(a)$ der Spalte Ba.

Sei ${}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch ${}_j(1) = e_j$ und ${}_i : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}$, gegeben durch ${}_i(\ {}_1, \ldots, \ {}_m)$, die Projektion auf die i te Komponente. Dann wird $f_A \quad {}_j$ gegeben durch die j-te Spalte von A und ${}_i \quad f_A$ durch die i-te Zeile von A.

Lemma 1.5.3 *Seien* z_i *die Zeilen von* A *und* s_i *die Spalten von* B $(i = 1, \ldots, m)$. *Dann sind die* z_iB *die Zeilen und die* As_i *die Spalten von* AB.

Kapitel 2

Vektorraume

2.1 Gruppen

Eine zweistellige *Operation* auf X ist eine Funktion $f : X^2 \to X$. Man schreibt haug xfy fur $f(x, y)$.

Denition *Eine Gruppe ist ein Paar* $(G, \ )$ *aus einer Menge* G *und einer zweistelligen Operation auf* G *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *(Assoziativitat):* $(a \quad b) \quad c = a \quad (b \quad c)$ *fur alle* $a, b, c \in G$
2. *Es gibt ein Element* $e \in G$ *mit*
   (a) *(linksneutral):* $e \quad a = a$ *fur alle* $a \in G$*.*
   (b) *(Linksinverses): Zu jedem* a *gibt es ein* a' *mit* $a' \quad a = e$*.*

Lemma 2.1.1 *Sei* $(G, \ )$ *eine Gruppe und* e *ein Element wie in der Denition. Dann gilt:*

1. *Ein Linksinverses von* a *ist auch Rechtsinverses.*
2. e *ist rechtsneutral.*
3. e *ist das einzige linksneutrale (rechtsneutrale) Element.*
4. a *hat nur ein Linksinverses (Rechtsinverses).*

Lemma 2.1.2 *Sei* $(G, \ )$ *eine Halbgruppe (d.h.* G *ist eine nicht–leere Menge und ist eine zweistellige assoziative Operation). Dann ist* G *genau dann eine Gruppe, wenn fur alle* $a, b \in G$ *die Gleichungen* $a \quad x = b$ *und* $y \quad a = b$ *losbar sind.*

In einer Gruppe bezeichnen wir mit e das *neutrale* und mit $a^{\ 1}$ das Inverse von a. e heit auch *Einselement.*

Denition *Sei* n *eine positive naturliche Zahl.*

$$a^0 = e$$

$$a^n = \underbrace{a \qquad a \quad a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$a^{\ \ n} = (a^{\ \ 1})^n$$

Lemma 2.1.3 *Sei G eine Gruppe. Dann gilt fur alle $a \in G$ und $x, y \in \mathbb{Z}$*

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$a^1 = a$$

Denition *Ein Gruppe heit abelsch oder kommutativ, wenn $ab = ba$ fur alle $a, b \in G$.*

Die Gruppenoperation in abelschen Gruppen schreibt man haug als $+$, das neutrale Element als 0 und das Inverse von a als $\ \ a$. Statt a^z schreibt man dann za.

Lemma 2.1.4 *Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist G ein $\mathbb{Z}$–Modul . Das heit, f ur alle $a \in G$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ ist*

1. $x(a + b) = xa + xb$
2. $(x + y)a = xa + ya$
3. $(xy)a = x(ya)$
4. $1a = a$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heit *injektiv*, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ fur alle $x_1, x_2 \in X$. f heit *surjektiv* , wenn Y das *Bild*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$$

von f ist. Eine injektive und surjektive Abbildung heit *bijektiv* oder *Bijektion*. Die *Umkehrabbildung* $f^{\ \ 1}$ einer Bijektion f ist bestimmt durch $f^{\ \ 1} \quad f = \mathrm{id}_X$. Eine Bijektion $f : X \to X$ heit *Permutation* von X. (Zur Notation: $f \quad g$ ist die durch $(f \quad g)(x) = f(g(x))$ denierte *Verknupfung* oder *Komposition* von f und g. id_X bezeichnet die *identische* Abbildung von X nach X: Es ist $\mathrm{id}_X(x) = x$ fur alle $x \in X$.)

Denition $\mathrm{Sym}(X)$=*Gruppe der Permutationen von X. (Symmetrische Gruppe)*
$\mathrm{S}_n = \mathrm{Sym}(1, \ldots, n)$

S_1 und S_2 sind kommutativ. S_3 und alle weiteren S_n sind nicht kommutativ.

Man schreibt $\begin{matrix} 1 & 2 & & n \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{matrix}$ fur das Element von S_n, das i die Zahl a_i zuordnet.

Denition *Sei $(G, \ )$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge von G, die e enthalt und unter $\quad$ und $^{\ \ 1}$ abgeschlossen ist. U ist wieder eine Gruppe mit der eingeschrankten Operation $\quad (U \quad U)$*

Die *Einschrankung* $f \quad A$ einer Funktion $f : X \to Y$ auf eine Teilmenge A von X ist die auf A denierte Funktion, die auf $\ A$ mit f ubereinstimmt. Wenn man eine Funktion als eine Menge von Paaren auffat, ist also $f \quad A = f \cap A \quad Y$.

Denition *G und H seien Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to H$ ist ein Homomorphismus, wenn $f(ab) = f(a)f(b)$ fur alle $a, b \in G$.*

Fur ein festes $a \in H$ ist $z \mapsto a^z$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach H. Die Abbildung, die jeder ganzen Zahl ihren Rest modulo n zuordnet, ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ in die Gruppe der Reste modulo n. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ deniert durch $x \mapsto e^x$ ist ein Isomorphismus (s.u.) zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.

Lemma 2.1.5 *Das Bild eines Homomorphismus $f : G \to H$ ist eine Untergruppe von H.*

Ein bijektiver Homomorphismus heit *Isomorphismus* zwischen Gruppen . Zwei Gruppen G und H, zwischen denen es einen Isomorphismus gibt, heien *isomorph*: $G = H$.

Lemma 2.1.6 *Isomorphie ist eine Aquivalenzrelation.*

Zum Begri einer Aquivalenzrelation vergleiche Seite 14.

Satz 2.1.7 (Cayley) *Jede Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe von $Sym(G)$.*

2.2 $\mathbb{R}$–Vektorraume

Denition *Ein $\mathbb{R}$–Vektorraum V ist ein $\mathbb{R}$–Modul. Das heit: eine abelsche Gruppe V mit einer Multiplikation $\mathbb{R} \quad V \to V$, soda f ur alle , $\in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ die folgenden Rechenregeln gelten:*

1. $(u + v) = u \quad + v$
2. $(\quad + \quad)u = u \quad + u$
3. $(\quad)u = \quad (u \quad)$
4. $1u = u$

Es folgt $0u = 0$.

Denition

1. *Ein Unterraum U von V ist eine Untergruppe, die unter Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist.*
2. *Eine lineare Abbildung $f : V \to U$ ist ein Homomorphismus, der mit der Multiplikation mit Skalaren kommutiert: $f(v \quad) = f \quad (v)$ fur alle $v \in V$ und alle $\in \mathbb{R}$. Eine bijektive lineare Abbildung heit Isomorphismus.*

Lemma 2.2.1 *Die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind genau die linearen Abbildungen im Sinn von Abschnitt 1.5.*

Denition *Eine Folge $v_1, \ldots, v_n$ heit Basis von V, wenn sich jedes Element von V eindeutig in der Form $\sum_{j=1}^{n} \ {}_j v_j$ schreiben lat.*

Satz 2.2.2 *Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und $f_1, \ldots, f_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to V$, die eindeutig durch $g(f_j) = v_j$ bestimmt ist, ein Isomorphismus.*

Die Wahl einer Basis von V ist gleichbedeutend mit der Wahl eines Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und V.

Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $v_1, \dots, v_n$ und $u_1, \dots, u_m$ seien Basen von V und U. Wenn die Isomorphismen $\; : \mathbb{R}^n \to V$ und $\; : \mathbb{R}^m \to U$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ auf diese Basen abbilden, ist die lineare Abbildung $\;^{1} \; f \quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine m-n–Matrix $A = (\;_{ij})$ gegeben. Es gilt dann

$$f(\sum_{j=1}^{n} \;_j v_j) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} \;_{ij} \;_j)u_i.$$

Insbesondere ist

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \;_{ij} u_i.$$

Oder in symbolischer Schreibweise

$$f(v_j) = (u_1 u_2 \dots u_m) \begin{pmatrix} \;_{1j} \\ \vdots \\ \;_{mj} \end{pmatrix}$$

Zusammengefat:

$$(f(v_1) \dots f(v_n)) = (u_1 u_2 \dots u_m)A$$

$f \quad = \quad f_A$ bedeutet, da das folgende Diagramm *kommutativ* ist:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & U \\ \mathbb{R}^n \arrow[u] \arrow[r, "f_A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Wir sagen, da f bezuglich der Basen (v_j) und (u_i) zur Matrix A gehort.

Denition *Eine Folge $a_1, \dots, a_n$ heit Erzeugendensystem von V, wenn sich jedes Element von V in der Form $\sum_{j=1}^{n} \;_j a_j$ darstellen lat. Das heit, da $V = \mathbb{R}a_1 + \quad + \mathbb{R}a_n$. Eine endliche Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ heit Erzeugendensystem, wenn $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem ist.*

Lemma 2.2.3 *Sei U der kleinste Unterraum, der $a_1, \dots, a_n$ enthalt. Dann ist $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem von U.*

Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ einer beliebigen Familie von Unterraumen ist wieder ein Unterraum. Der Durchschnitt aller Unterraume, die A enthalten, ist der kleinste Unterraum, der A enthalt.

Denition *V heit endlich erzeugt, wenn V ein Erzeugendensystem hat.*

Denition *Eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ heit linear unabh angig, wenn fur alle* ${}_j \in \mathbb{R}$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} {}_j a_j \quad \Longrightarrow \quad {}_1 = \quad = {}_n = 0.$$

Wenn auerdem die a_j paarweise verschieden sind, heit die Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linear unabhangig.

Eine Folge, in der 0 oder zwei gleiche Vektoren vorkommen, ist linear abhangig.

Lemma 2.2.4

1. *Eine Basis ist ein linear unabhangiges Erzeugendensystem.*
2. *Sei U eine linear unabhangige Teilmenge des Erzeugendensystems E. Dann gibt es eine Basis zwischen U und E.*

Jede unabhangige Teilmenge eines endlich erzeugten Vektorraums lat sich also zu einer Basis erweitern und jedes Erzeugendensystem enthalt eine Basis. Jeder endlich erzeugte Vektorraum ist zu einem $\mathbb{R}^n$ isomorph.

Satz 2.2.5 (Steinitzscher Austauschsatz)
Sei $a_1, \ldots, a_m$ ein Erzeugendensystem, $n \quad m$ und $u_1, \ldots, u_n$ linear unabhangig. Dann kann man die a_i so umordnen, da $u_1, \ldots, u_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ ein Erzeugendensystem ist.

Folgerung 2.2.6 *Eine linear unabhangige Menge hat hochstens so viel Elemente wie ein Erzeugendensystem.*

Folgerung 2.2.7 *Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V haben die gleiche Machtigkeit: die Dimension* $\dim(V)$ *von V.*

Folgerung 2.2.8 *Ein Unterraum U eines endlich erzeugten Vektorraums V ist endlich erzeugt. Es gilt* $\dim(U) \quad \dim(V)$.

2.3 Unendlich dimensionale Vektorraume

Denition *Fur eine Menge I sei $\mathbb{R}^{(I)}$ die Menge alle Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, die an fast allen Stellen (d.h. an allen bis auf endlich vielen) den Wert 0 hat. $\mathbb{R}^{(I)}$ ist ein Vektorraum mit wertweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren.*

Satz 2.3.1 *Jeder Vektorraum ist zu einem $\mathbb{R}^{(I)}$ isomorph.*

Zum Beweis verallgemeinert man den Begri einer Basis, eines Erzeugendensystems und einer linear unabhangigen Menge auf unendliche Mengen. Man braucht das Zornsche Lemma.

Satz 2.3.2 (Zornsches Lemma) *Sei $(P, \quad)$ eine partielle Ordnung. Wenn jede Kette in P eine obere Schranke hat, hat P ein maximales Element.*

Eine (reexive) *partielle Ordnung* auf P ist eine zweistellige

reexive:	$x \quad x,$	
transitive:	$x \quad y \,\&\, y \quad z \Rightarrow x \quad z$ und	
antisymmetrische:	$x \quad y \,\&\, y \quad x \Rightarrow x = y$	

Relation. $<$, deniert durch

$$x < y :\Leftrightarrow (x \quad y \,\&x \neq y),$$

ist dann eine irreexive partielle Ordnung. Das heit, $<$ ist irreexiv ($x \not< x$) und transitiv. Eine partielle Ordnung lat sich aquivalent durch ihre irreexive Form angeben. In einer totalen (oder linearen) Ordnung sind alle Elemente x, y vergleichbar, das heit $x \quad y$ oder $y \quad x$.

Eine Teilmenge A von P ist eine *Kette*, wenn A durch linear geordnet ist.

$p \in P$ ist eine *obere Schranke* von A, wenn $a \quad p$ fur alle $a \in A$.

$a \in A$ ist ein *maximales* Element von A, wenn $a \quad a' \Rightarrow a = a'$ fur alle $a' \in A$.

a heit *grotes* Element, wenn $a' \quad a$ fur alle $a' \in A$.

Eine (die) kleinste obere Schranke von A (falls vorhanden) heit *Supremum* $\sup(A)$ von A. Das *Inmum* $\inf(A)$ ist eine grote untere Schranke.

2.4 Der Verband der Unterraume

Denition *Eine partielle Ordnung heit Verband, wenn je zwei Elemente ein Supremum und ein Inmum haben.*

Satz 2.4.1 *Sei V ein Vektorraum. Dann bilden die durch Inklusion geordneten Unterraume von V einen Verband. Dabei ist $\sup(U_1, U_2) = U_1 + U_2$ und $\inf(U_1, U_2) = U_1 \cap U_2$.*

Das direkte Produkt $U_1 \quad U_2$ zweier Vektorraume wird mit elementweisen Operationen Vektorraum, der *direkten Summe* $U_1 \bigoplus U_2$.

Lemma 2.4.2

$$\dim(U_1 \bigoplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

Zwei Unterraume U_1 und U_2 von V sind *unabhangig*, wenn $u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0$. Aquivalent ist: $U_1 \cap U_2 = 0$.

Satz 2.4.3 *Wenn U_1 und U_2 unabhangig, ist die lineare Abbildung von $U_1 \bigoplus U_2 \rightarrow \quad U_1 + U_2$, deniert durch $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$, ein Isomorphismus.*

Wenn U und U' unabhangig sind und $U + U' = V$, heit U' *Komplement* von U in V.

Lemma 2.4.4 *Jeder Untervektorraum von V hat ein Komplement.*

Wenn U' und U'' zwei Komplemente von U sind, wird durch

$$f(u') = u'' \Leftrightarrow u' \quad u'' \in U$$

ein Isomorphismus $f : U' \rightarrow U''$ deniert.

Sei U ein Unterraum von V. Mengen der Form $v + U$ heien *Nebenklassen* von U.

Lemma 2.4.5 *Nebenklassen von U sind gleich oder disjunkt. Es gilt $v_1 + U = v_2 + U \Leftrightarrow v_1 \quad v_2 \in U$.*

Denition *$V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ heit der Quotient von V nach U.*

Satz 2.4.6 *Durch $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U$ und $r(v + U) = rv + U$ wird auf V/U eine Vektorraumstruktur deniert, die eindeutig dadurch bestimmt ist, da die durch $x \mapsto x + U$ denierte Projektion $: V \to V/U$ linear ist.*

Lemma 2.4.7 *Sei U' ein Komplement von U in V. Dann induziert einen Isomorphismus $U' \to V/U$.*

Folgerung 2.4.8 *Wenn V endlichdimensional ist, ist $\dim(U) + \dim(V/U) = \dim(V)$.*

Die *Kodimension* $\operatorname{codim}_V(U)$ von U in V ist die Dimension von V/U.

Satz 2.4.9

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

Aquivalenzrelationen und Partitionen:
Sei X eine Menge. Eine *Aquivalenzrelation* E ist eine zweistellige reexive, transitive und symmetrische (d.h. $xEy \Rightarrow yEx$) Relation auf X. Eine *Partition* von X ist eine Teilmenge $\mathfrak{B}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X) = \{A \mid A \quad X\}$ von X, deren Elemente nichtleer, paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung X ist.

Aquivalenzrelationen und Partitionen entsprechen einander: Setzt man $x/E = \{y \in X \mid yEx\}$ fur $x \in X$ und eine Aquivalenzrelation E, so ist $\mathfrak{B} = \{x/E \mid x \in X\}$ die zugehorige Partition von X. Wenn umgekehrt $\mathfrak{B}$ eine Partition ist, so erhalt man mit

$$xEy \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \in \mathfrak{B} \quad x \in B \,\&\, y \in B$$

die zugehorige Aquivalenzrelation.

Eine Unterraum U von V bestimmt auf V die Aquivalenzrelation $x \quad y \in U$ mit der Partition $\{v + U \mid v \in V\}$.

2.5 Korper

Ein *Ring* R ist ein Tripel $(R, +, \ )$, wobei

- $(R, +)$ eine abelsche Gruppe,
- $(R, \ )$ eine Halbgruppe ist und
- die Distributivgesetze $x(y + z) = xy + xz$ und $(x + y)z = xz + yz$

gelten.

Ein *Einselement* 1, falls vorhanden, erfullt $x1 = 1x = x$.
R ist *kommutativ*, wenn die Multiplikation kommutativ ist.
Ein *Korper* ist ein kommutativer Ring mit Einselement 1, in dem jedes von Null verschiedene Element ein Inverses bezuglich der Multiplikation besitzt. Auerdem fordert man, da $0 \quad \neq 1$.

Beispiele

$\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Korper.

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist kommutativer Ring mit 1.
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Korper, wenn p eine Primzahl ist. Wir schreiben dann $\mathbb{F}_p$ dafur.

Eine $\mathbb{R}$–*Algebra* A ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit einer bilinearen Operation (der Multiplikation).

$\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ ist eine $\mathbb{R}$–Algebra der Dimension m^2.

Denition *Eine Abbildung* $\quad : V_1 \quad V_2 \quad \ldots \quad V_m \to W$ *ist multilinear, wenn fur alle* $i = 1, \ldots, m$ *und fur alle* $v_1 \in V, \ldots, v_m \in V$ *die Abbildung* $\quad : V_i \to W$ *deniert durch* $\quad (x) = \quad (v_1, \ldots, v_{i \ 1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_m)$ *linear ist.*

Lemma 2.5.1 *Seien die* B_i *Basen von* V_i. *Dann ist eine multilineare Abbildung bestimmt durch die Werte* $\quad (b_1, \ldots, b_m)$ *fur* $b_i \in B_i$. *Diese Werte lassen sich beliebig vorschreiben.*

Folgerung 2.5.2 *Sei* $b_1, \ldots, b_n$ *eine Basis von* V. *Fur beliebige Vektoren* a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *gibt es genau eine Algebren–Multiplikation auf* V *mit* $b_i b_j = a_{ij}$.

$\mathbb{R}^3$ wird mit dem *Kreuzprodukt* eine Algebra, wenn man die Produkte $e_i \quad e_j$ der kanonischen Basisvektoren deniert durch

$$\begin{array}{lllllllll} e_1 \quad e_2 & = & e_3 & , & e_2 \quad e_3 & = & e_1 & , & e_3 \quad e_1 = e_2 \\ e_2 \quad e_1 & = & \ e_3 & , & e_3 \quad e_2 & = & \ e_1 & , & e_1 \quad e_3 = \ e_2 \\ e_1 \quad e_1 & = & 0 & , & e_2 \quad e_2 & = & 0 & , & e_3 \quad e_3 = 0. \end{array}$$

Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ. Es handelt sich vielmehr um eine *Liealgebra*.

Folgerung 2.5.3 *Sei* A *eine* $\mathbb{R}$*–Algebra mit Basis* $b_1, \ldots, b_n$. *Dann ist*

1. *die Multiplikation assoziativ genau dann, wenn* $b_i(b_j b_k) = (b_i b_j) b_k$ *fur alle* i, j, k,
2. *die Multiplikation kommutativ genau dann, wenn* $b_i b_j = b_j b_i$ *fur alle* i, j,
3. $\mathbf{1}$ *ein Einselement genau dann, wenn* $\mathbf{1} b_i = b_i \mathbf{1} = b_i$ *fur alle* i.

Die $\mathbb{R}$–Algebra $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen entsteht aus $\mathbb{R}^2$ durch folgende Multiplikation: (Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ sei hier mit $\mathbf{1}, i$ bezeichnet.)

$$\mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1}i = i\mathbf{1} = i, \quad ii = \quad \mathbf{1}$$

Lemma 2.5.4
$\mathbb{C}$ *ist ein Korper.*

Wir fassen $\mathbb{R}$ vermoge der Einbettung $\ _1$ als Unterraum von $\mathbb{C}$ auf. Die kanonische Basis ist dann $1, i$.

Denition *Sei* R *ein Ring mit Einselement. Ein* R*–Modul ist eine abelsche Gruppe* M *mit einer Multiplikation* $R \quad M \to M$, *die den folgenden Regeln genugt:*

1. *r(x+y)=rx+ry*
2. *(r+s)x=rx+sx*
3. *(rs)x=r(sx)*
4. *1x=x*

Wenn R *ein Korper ist, nennt man einen* R*–Modul einen* R*–Vektorraum.*

Alle Satze des Kapitels gelten fur beliebige K–Vektorraume.

Kapitel 3

Lineare Abbildungen

3.1 Der Noethersche Isomorphiesatz

Wir xieren einen K orper K. Vektorraum heit jetzt immer K–Vektorraum.
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Lemma 3.1.1 *Das Bild* $\mathrm{Im}(f) = f[A]$ *von* f *ist ein Unterraum von* W*. Der Kern*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

ist ein Unterraum von V*.*

f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Denn $f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$

<u>Notation</u>
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, a ein Element von Y und A eine Teilmenge von Y. Dann bezeichnen wir mit $f^{-1}(a)$ und $f^{-1}(A)$ jeweils die Menge $\{x \mid f(x) = a\}$ bzw. $\{x \mid f(x) \in A\}$ der Urbilder von a bzw. A. (Wenn f eine Bijektion ist, hat $f^{-1}(a)$ zwei Bedeutungen!)

Oenbar ist $\mathrm{Ker}(\ f) = f^{-1}(0)$. Wenn $f(a) = b$, ist $a + \mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(b)$.

Satz 3.1.2 (Noetherscher Isomorphiesatz) f *induziert einen Isomorphismus*

$$\overline{f} : V/\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Im}(f)$$

.

Folgerung 3.1.3

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Folgerung 3.1.4 *Sei* $f : V \to W$ *eine lineare Abbildung,* $\dim(V) = n$ *und* $\dim(W) = m$*.*

1. *Fur alle* $b \in W$ *ist* $f^{-1}(b)$ *leer oder eine Nebenklasse von* $\mathrm{Ker}(f)$*.*
2. *Wenn* $m < n$*, ist* $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$*.*
3. *Wenn* $m = n$*, so sind aquivalent:*
   (a) $\mathrm{Ker}(f) = 0$

(b) *f ist injektiv.*

(c) *f ist surjektiv.*

Folgerung 3.1.5 *Sei A eine m-n–Matrix und H die Menge der Losungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dann gilt*

1. *Fur alle Spaltenvektoren b der Lange m ist die Losungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ leer oder eine Nebenklasse von H.*

2. *Wenn $m < n$, ist $H \neq \mathbf{0}$.*

3. *Wenn $m = n$, so sind aquivalent:*

   (a) *$H = \mathbf{0}$*

   (b) *Fur alle b hat $Ax = b$ hochstens eine Losung.*

   (c) *$Ax = b$ ist losbar fur alle b.*

Denition *Der Rang von f ist die Dimension des Bildes von f. Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhangiger Spalten.*

Lemma 3.1.6 *Sei A eine m-n–Matrix und $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die dadurch denierte lineare Abbildung. Dann ist der Rang von A gleich dem Rang von f_A.*

3.2 Die lineare Gruppe

Ein *Endomorphismus* von V ist eine lineare Abbildung von V nach V. Ein bijektiver Endomorphismus heit *Automorphismus* oder *regular*. Ein Endomorphismus, der nicht regular ist, heit *singularer Endomorphismus*. Die Automorphismen von V bilden mit der Komposition als Verknupfung eine Gruppe, die *lineare Gruppe* $\mathrm{Gl}(V)$ mit der identischen Abbildung id_V als neutralem Element. Die Endomorphismen von V bilden die K–Algebra $\mathrm{End}(V)$.

Lemma 3.2.1 *Sei V endlichdimensional und f ein Endomorphismus von V. Dann sind aquivalent:*

1. *f ist regular*

2. *f ist injektiv*

3. *f ist surjektiv*

Eine n-n–Matrix A heit *regular*, wenn $f_A : K^n \to K^n$ regular ist (sonst *singular*). Die Menge $\mathrm{Gl}_n(K)$ der regularen n-n–Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als Operation ist eine Gruppe. Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist das Einselement. Identiziert man n-n–Matrizen mit Endomorphismen von K^n, wird $\mathrm{Gl}_n(K) = \mathrm{Gl}(K^n)$.

Lemma 3.2.2 *Fur eine n-n–Matrix A sind aquivalent:*

1. *A ist regular*

2. *A hat Rang n.*

3. *A hat ein Linksinverses B: $BA = \mathbf{I}$*

4. A hat ein Rechtsinverses B: $AB = \mathbf{I}$

Es ist $\mathrm{Gl}_1(K) = K$, die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente von K.

$\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_p)$ hat

$$(p^n \quad 1)(p^n \quad p)\dots(p^n \quad p^{n \quad 1})$$

viele Elemente.

Die *Elementarmatrizen*

$$\mathrm{E}_{ij} \quad (1 \quad i \neq j \quad n, \quad \in K)$$

sind n-n–Matrizen, in deren Diagonalen Einsen stehen und deren andere Eintrage Null sind. Nur an der Stelle (i,j) steht .

Die *Elementarmatrizen*

$$\mathrm{E}_i \quad (1 \quad i \quad n, \quad \in K \ )$$

haben Einsen in der Diagonalen und Nullen sonst. Nur an der Stelle (i,i) steht .

Elementarmatrizen sind regular. Es ist $(\mathrm{E}_{ij})\ ^{1} = \mathrm{E}_{ij}$ und $(\mathrm{E}_i\ )\ ^{1} = \mathrm{E}_i\ ^{1}$.

$\mathrm{E}_{ij}A$ entsteht aus A durch Anwenden der Zeilenoperation Z_{ji}, $\mathrm{E}_i\ A$ durch Anwenden der Zeilenoperation Z_i .

Satz 3.2.3 $\mathrm{Gl}_n(K)$ *wird von Elementarmatrizen erzeugt. Das heit, da sich jede regul are Matrix als Produkt von Elementarmatrizen (und ihren Inversen) schreiben lat.*

3.3 Basiswechsel

Seien $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathfrak{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ zwei Basen von V. Der *Wechsel* von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ wird durch die regulare Matrix $A = (\ _{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ mit

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} \ _{ij} b_i,$$

beschrieben. Die Koezienten eines Punktes

$$_1 b_1 + \quad + \ _n b_n = \ '_1 b'_1 + \quad + \ '_n b'_n$$

bezuglich der beiden Basen gehen durch

$$_i = \sum_{j=1}^{n} \ _{ij} \ '_j$$

auseinander hervor.

In Matrizenschreibweise sehen die Gleichungen so aus:

$$(b'_1 \dots b'_n) = (b_1 \dots b_n)A \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} _1 \\ \vdots \\ _n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} '_1 \\ \vdots \\ '_n \end{pmatrix} .$$

Wenn die Isomorphismen und $'$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ abbilden, haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & V & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, phantom, "'"] \arrow[rr, "f_A"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Satz 3.3.1 *U,V und W seien endlich–dimensionale Vektorraume mit ausgewahlten Basen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.*

$f : V \to U$ und $g : W \to V$ seien lineare Abbildungen, die Matrizen B und C entsprechen. Sei nun durch A ein Basiswechsel von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}'$ gegeben. Dann gilt:

1. *Bezuglich der Basen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$ gehort zu f die Matrix*
$$BA.$$
2. *Bezuglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}$ gehort zu g die Matrix*
$$A\ ^{1}C.$$

Folgerung 3.3.2 *Sei U ein endlich–dimensionaler Vektorraum mit ausgezeichneter Basis $\mathfrak{B}$. $f : U \to U$ sei ein durch die Matrix C beschriebener Endomorphismus. Wenn wir mit Hilfe der Matrix A zur Basis $\mathfrak{B}'$ ubergehen, wird f durch die Matrix $A\ ^{1}CA$ beschrieben.*

Zwei quadratische Matrizen C und C' heien *ahnlich* oder *konjugiert* , wenn $C' = A\ ^{1}CA$ fur eine regulare Matrix A.

Satz 3.3.3 *U und V seien Vektorraume der Dimension m und n, $f : V \to U$ eine lineare Abbildung vom Rang k. Dann kann man Basen in U und V so wahlen, da f durch die m-n–Matrix*

(*)
$$B = \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

dargestellt wird, wobei I die k–dimensionale Einheitsmatrix ist.

In B stehen also bis auf k Einsen in der Diagonalen nur Nullen.

<u>Variante 1</u>

Eine m-n–Matrix B hat genau dann den Rang k, wenn es eine regulare m-m–Matrix A und eine regulare n-n–Matrix C gibt, soda ABC die Gestalt (*) hat.

<u>Variante 2</u>

Jede m-n–Matrix vom Rang k lat sich durch Zeilen– und Spaltenoperationen auf die Gestalt (*) bringen.

Satz 3.3.4 *U und V seien Vektorraume der Dimension m und n, $f : V \to U$ eine lineare Abbildung vom Rang k. In V sei eine Basis $\mathfrak{B}$ xiert. Dann kann man $\mathfrak{B}$ so zu einer Basis $\mathfrak{B}'$ umordnen und eine Basis $\mathfrak{A}$ von U so wahlen, da f bezuglich der Basen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}$ durch eine Matrix in* Normalform

$$\begin{array}{c|c} I & \\ \hline 0 & 0 \end{array} \tag{3.2}$$

dargestellt wird, wobei I die k–dimensionale Einheitsmatrix und eine beliebige k-(n k)–Matrix ist.

Als Folgerung erhalt man noch einmal Lemma 1.1.2: Jede Matrix vom Rang k lat sich durch Zeilenoperationen und Umordnen der Spalten in eine Matrix in Normalform vom Rang k bringen.

Kapitel 4

Determinanten

4.1 Die Signatur einer Permutation

Wir halten eine naturliche Zahl $n \quad 1$ fest und betrachten Elemente von S_n, der Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Ein *Fehlstand* einer Permutation ist eine Menge von zwei Zahlen, deren Ordnung von umgedreht wird: Also eine Menge $\{i, j\}$ mit $i < j$ und $f(i) > f(j)$.

Lemma 4.1.1 *Sei F die Menge der Fehlstande von und G die Menge der Fehlstande von . Dann ist*

$$^{1}(F) \triangle G$$

die Menge der Fehlstande von .

Dabei ist $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symmetrische Dierenz* von A und B.

heit *gerade* bzw. *ungerade*, wenn eine gerade bzw. ungerade Zahl von Fehlstanden hat. Die *Signatur einer Permutation*

$$\mathrm{sign}(\quad) = (\quad 1)^{(\text{Zahl der Fehlstande von f})}$$

einer geraden Permutation ist also 1, die Signatur einer ungeraden Permutation ist -1.

Satz 4.1.2

$$\mathrm{sign} : \mathrm{S_n} \to \{1, \quad 1\}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Eine Folge $a_1, \ldots, a_k$ von paarweise verschiedene Zahlen zwischen 1 und n deniert einen *Zyklus*

$$(a_1, \ldots, a_k).$$

Das ist die Permutation, die die Zahlen a_i (fur $i < k$) auf a_{i+1} abbildet, a_k auf a_1 und alle anderen Zahlen zwischen 1 und n auf sich selbst abbildet. Ein Zyklus der Lange k hat die Signatur $(\quad 1)^{k \quad 1}$

Lemma 4.1.3 *Jede Permutation lat sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von disjunkten Zyklen schreiben.*

Ein Zyklus der Lange zwei heit *Transposition.*

Folgerung 4.1.4 *Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen.*

4.2 k–Formen

Sei V ein K–Vektorraum.

Denition *Eine k–stellige multilineare Abbildung* $: V^k \to K$ *(eine* Multilinearform*) heit alternierend oder k–Form, wenn sie eine der folgenden aquivalenten Bedingungen erfullt:*

1. $(a_1, \ldots, a_k) = 0$ *fur alle k–tupel $a_1, \ldots, a_k$, in denen ein Vektor zweimal vorkommt.*
2. *Fur alle $a_1, \ldots, a_k \in V$, alle* $1 \quad i \neq j \quad n$ *und alle* $\in K$ *ist*

$$(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k) = \quad (a_1, \ldots, a_i + a \quad _j, \ldots, a_k)$$

Lemma 4.2.1

1. *Jede Linearkombination von k–Formen ist wieder eine k–Form.*
2. *Sei* $: V \to U$ *eine lineare Abbildung und eine k–Form auf U. Dann ist , deniert durch*

$$(a_1, \ldots, a_k) = \quad (\quad (a_1), \ldots, \quad (a_k))$$

eine k–Form auf V.

Lemma 4.2.2 *Sei eine k–Form auf V.*

1. $(a_1, \ldots, a_k) = 0$ *fur alle linear abhangigen k–tupel $a_1, \ldots, a_k$.*
2. *Fur jede k–Form , alle $a_1, \ldots, a_k \in V$, und alle* $1 \quad i < j \quad k$ *ist*

$$(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j \ldots, a_k) = \quad (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i \ldots, a_k)$$

Wenn in K die Zahl 2 ($= 1 + 1$) verschieden von Null ist (man sagt: Wenn K nicht die *Charakteristik* 2 hat), gilt eine Umkehrung: Multilinearformen, die 2 erfullen, sind alternierend.

Im nachsten Lemma erweitern wir den Begri der Signatur auf beliebige Abbildungen $: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$: Die Signatur sign( ) von ist 0, wenn keine Permutation ist. Satz 4.1.2 gilt immer noch in der Form

$$\mathrm{sign}(\quad) = \mathrm{sign}(\quad)\mathrm{sign}(\quad)$$

fur beliebige und .

Lemma 4.2.3 *Sei eine k–Form auf V Dann ist fur jede Abbildung* $: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ *und alle $a_1, \ldots, a_k \in V$*

$$(a_{\ (1)}, \ldots, a_{\ (k)}) = \mathrm{sign}(\quad) \quad (\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k).$$

Folgerung 4.2.4 *Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis von V. Dann ist bestimmt durch die Werte* $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ *fur alle* $1 \quad i_1 < \ldots < i_k \quad n$.

4.3 Determinanten

Satz 4.3.1 *Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\in K$. Dann gibt es genau eine n–Form mit $(b_1, \dots, b_n) =$.*

Folgerung 4.3.2 *Sei V n–dimensional und $_0$ eine nicht–triviale n–Form auf V. Dann ist jede andere n–Form ein Vielfaches von $_0$.*

Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ und D die n-Form auf $\mathbb{R}^n$, fur die $D(e_1, \dots, e_n) = 1$. Die *Determinante* einer n-n–Matrix A ist

$$\det(A) = D(s_1, \dots, s_n),$$

wobei $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A sind. Man schreibt auch $\|A\|$ fur die Determinante von A.

Satz 4.3.3

1. $\det(A)$ *ist eine alternierende Multilinearform der Spalten von A.*
2. $\det(\mathbf{I}) = 1$
3. *Wenn $A = (\ _{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$, ist*

$$\det(A) = \sum_{\in \mathrm{S}_n} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{sign}(\ ) \quad _{\mathrm{(j),j}}.$$

Beispiele

$$\det(a) = a$$

$$\det \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} = a_1 b_2 \quad a_2 b_1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \quad a_2 b_1 c_3 \quad a_1 b_3 c_2 \quad a_3 b_2 c_1$$

$$\det \begin{pmatrix} _1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & _2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & _n \end{pmatrix} = \ _1 \ _2 \cdots \ _n$$

$$\det(E_i \ ) =$$

$$\det(E_{ij}) = 1$$

Matrizen der Form $\begin{pmatrix} _1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & _2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & _n \end{pmatrix}$ heien *Diagonalmatrizen.*

Satz 4.3.4

1. *Die Determinante von A ist genau dann 0, wenn A singular ist.*
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Die n-n–Matrizen uber K, deren Determinante 1 ist, bilden also eine Untergruppe $\mathrm{Sl}_n(K)$ von $\mathrm{Gl}_n(K)$, die *spezielle* lineare Gruppe.

Satz 4.3.5 (Die Cramersche Regel) *Sei $Ax = b$ ein quadratisches Gleichungssystem, $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von A. Wenn A regular ist, errechnet sich der Losungsvektor als*

$$x_j = \frac{\det(s_1, \ldots, s_{j\ \ 1}, b, s_{j+1}, \ldots, s_n)}{\det(A)}.$$

Sei ein Endomorphismus des n–dimensionalen Vektorraums V und $_0$ eine nicht–triviale n–Form auf V. Dann ist nach 4.3.1 die n–Form $_0$ ein Vielfaches $_0$ von $_0$. Der Faktor hangt nicht von der Wahl von $_0$ ab und heit die *Determinante* $\det(\ )$ von . Es gilt also

$$(\ (a_1), \ldots, \ (a_n)) = \det(\ )\ (a_1, \ldots, a_n)$$

fur alle n–Formen und alle $a_1, \ldots, a_n \in V$.

Lemma 4.3.6 *Es ist* $\det(f_A) = \det(A)$

Satz 4.3.7 $\det(\quad) = \det(\ )\det(\ )$

Denition *Die Transponierte einer m-n–Matrix $A = (\ _{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}$ ist die n-m–Matrix*

$$A^\top = (\ _{ij})_{\substack{j=1\ldots n\\ i=1\ldots m}}$$

Es ist $(AB)^\top = B^\top A^\top$. A ist genau dann regular, wenn $A^\top$ regular ist.

Satz 4.3.8

1. $\det(A^\top) = \det(A)$
2. $\det$ *ist eine alternierende Multilinearform der Zeilen von A.*

4.4 Der Laplacesche Entwicklungssatz

<u>Notation</u>
Fur eine n-n–Matrix A und zwei Indizes i und j bezeichnen wir mit A_{ij} die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i–te Zeile und die j–te Spalte streicht.

Satz 4.4.1 (Entwicklungssatz von Laplace)

Sei $A = (\ _{ij})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots n}}$ eine n-n–Matrix und j_0 ein Spaltenindex. Dann ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} (\ \ 1)^{i+j_0}\ \ _{ij_0} \det(A_{ij_0}).$$

Deniere die *Adjunkte* $\mathrm{adj}(A) = (\ _{ij})$ einer n-n–Matrix A durch

$$_{ij} = (\ \ 1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Satz 4.4.2 $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,\mathbf{I}$

Wenn A regular ist, ist also

$$A^{\ \ 1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}.$$

Kapitel 5

Endomorphismen

5.1 Diagonalisierbare Endomorphismen

V sei im Folgenden ein n–dimensionaler K-Vektorraum und ein Endomorphismus von V

Denition *Ein Endomorphismus heit diagonalisierbar, wenn bei geeigneter Basiswahl durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

Denition *Ein von Null verschiedener Vektor v heit Eigenvektor, wenn (v) Vielfaches von v ist, wenn also*

$$(v) = v$$

fur ein $\in K$. Der Faktor heit dann Eigenwert von .

ist genau dann Eigenwert von , wenn id singular ist.

Eigenvektoren und Eigenwerte einer quadratischen Matrix A sind die Eigenvektoren und Eigenwerte von f_A.

<u>Beispiel</u> Die Eigenwerte einer *oberen Dreiecksmatrix*

$$\begin{pmatrix} {}_1 & & \cdots & \\ 0 & {}_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}_n \end{pmatrix}$$

sind ${}_1, \ldots, {}_n$.

Lemma 5.1.1 *ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren hat.*

Denition

$$V = \{v \in V \mid (v) = v \}$$

heit der Eigenraum von .

V ist ein Unterraum, der von in sich abgebildet wird, ein sogenannter –*invarianter* Unterraum.

Satz 5.1.2 *ist genau dann diagonalisierbar, wenn V Summe von Eigenraumen ist.*

Lemma 5.1.3 *Wenn $_1, \ldots, _k$ paarweise verschieden sind, sind die $V_1, \ldots, V_k$ unabhangig. Das heit, da eine Summe $v_1 + \quad + v_k$ mit $v_i \in V_i$ nur Null sein kann, wenn alle v_i Null sind.*

Die Summe U der Eigenraume $V_1, \ldots, V_k$ ist also *direkt*: Das heit, da sich jedes Element von U eindeutig als Summe $v_1 + \quad + v_k$ $(v_i \in V_i)$ schreiben lat.

Folgerung 5.1.4 *hat hochstens n Eigenwerte. Wenn n Eigenwerte hat, ist diagonalisierbar.*

5.2 Das charakteristische Polynom

Sei K ein Korper. Der *Polynomring* $K[x]$ ist ein kommutativer Oberring von K mit einem ausgezeichneten Element x, in dem sich jedes Element (*"Polynom"*) $p(x)$ eindeutig in der Form

$$a_n x^n + a_{n\ 1} x^{n\ 1} + \ldots + a_0$$

schreiben lat. ($K[x]$ lat sich als K–Algebra leicht mit den Methoden in 2.5 konstruieren.)

Der *Grad* $\mathrm{grad}(p)$ von $p(x)$ ist n, wenn $a_n \neq 0$. p heit *konstant*, wenn $\mathrm{grad}(p) \quad 0$. (Das Polynom 0 hat den Grad ∞ . Ein nicht-konstantes Polynom p heit *normiert*, wenn $a_n = 1$. Es ist immer $\mathrm{grad}(pq) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$ und $\mathrm{grad}(p+q) \quad \max(\mathrm{grad}(p), \mathrm{grad}(q))$.

Sei R ein Oberring von K und r ein Element von R. Dann deniert die Abbildung

$$p(x) \mapsto \quad p(r) = a_n r^n + a_{n\ 1} r^{n\ 1} + \ldots + a_0$$

einen *Homomorphismus* von $K[x]$ nach R, den sogenannten *Einsetzungshomomorphismus*. Es gilt also $(p+q)(r) = p(r) + q(r)$ und $(pq)(r) = p(r)q(r)$. r ist *Nullstelle* von p, wenn $p(r) = 0$.

$K[x]$ ist ein *Integritatsbereich*. Das ist ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$, der *nullteilerfrei* ist: $rs = 0 \Rightarrow r = 0 \,\text{oder}\, s = 0$. Ein Integritatsbereich R lat sich immer in einen K orper Q, seinen *Quotientenkorper* einbetten. Man deniert auf der Menge aller Paare ($r, s)$, $(r, s \in R, s \neq 0)$ eine Aquivalenzrelation durch $(r, s) \quad (r', s') \Leftrightarrow rs' = sr'$ und setzt $Q = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in R, s \neq 0\}$, wobei $\frac{r}{s}$ die Aquivalenzklasse von (r, s) bezeichnet. Mit den Operationen $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + sr'}{ss'}$ und $\frac{r}{s}\frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$ wird Q zu einem Korper. Wenn man r mit $\frac{r}{1}$ identiziert, erh alt man R als Unterring. Der Quotientenkorper von $K[x]$ ist der *rationale Funktionenkorper* $K(x)$.

Lemma 5.2.1 *Sei $A(x)$ eine Matrix aus Polynomen, dann ist $\det(A(x))$ ein Polynom.*

Denition *Das charakteristische Polynom $\mathrm{P}_A(x)$ einer quadratischen Matrix A ist*

$$\mathrm{P}_A(x) = \det(xI \quad A).$$

Das charakteristische Polynom der oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} _1 & & \cdots & \\ 0 & _2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & _n \end{pmatrix}$$

ist $\prod_{i=1}^{n}(x \quad _i)$. Wir sagen $p(x)$ *zerfallt in Linearfaktoren.*

Weil ahnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben, kann man das charakteristische Polynom $\mathrm{P}\ (x)$ eines Endomorphismus durch das charakteristische Polynom einer zugehorigen Matrix denieren.

Lemma 5.2.2 *Sei Endomorphismus eines n–dimensionalen Vektorraums.*

1. $\mathrm{P}\ (x)$ *ist ein normiertes Polynom vom Grad n.*
2. *Die Eigenwerte von sind die Nullstellen von $\mathrm{P}\ (x)$.*

Die *Spur* $\mathrm{Tr}(A)$ einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente. Weil $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, haben ahnliche Matrizen dieselbe Spur und man kann die Spur $\mathrm{Tr}(\ )$ eines Endomorphismus als die Spur einer zugehorigen Matrix denieren.

Wenn $x^n + a_{n\ 1}x^{n\ 1} + \ldots + a_0$ das charakteristische Polynom von A ist, ist

$$\det(A) = (\ \ 1)^n a_0$$

und

$$\mathrm{Tr}(A) = \ \ a_{n\ 1}.$$

Satz 5.2.3 *lat sich bei geeigneter Basiswahl genau dann durch eine obere Dreiecksmatrix darstellen, wenn $p\ (x)$ in Linearfaktoren zerfallt.*

Man braucht zum Beweis einen Hilfssatz:

Satz 5.2.4 *Sei Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums V und U ein –invarianter Unterraum. Durch*

$$\bar{\ }(v + U) = \ \ (v) + U$$

wird ein Endomorphismus von V/U deniert. F ur die charakteristischen Polynome gilt

$$\mathrm{P}\ (x) = \mathrm{P}\ _{\restriction U}(x)\mathrm{P}_{\bar{\ }}(x).$$

(Das folgt aus der Gleichung

$$\det \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array} = \det(A)\det(C).)$$

5.3 Hauptraume

Im folgenden sei Endomorphismus des n–dimensionalen K–Vektorraums V und ein Element von K.

Denition *Der Hauptraum V' von ist die Menge aller Vektoren, die von einer Potenz von id auf Null abgebildet werden.*

In der Folge ${}_1, \ldots, {}_n$ seien die ersten k Zahlen $=$ und ${}_{k+1}, \ldots, {}_n$ verschieden von . Dann wird der zu gehorende Hauptraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} {}_1 & & \cdots & \\ 0 & {}_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}_n \end{pmatrix}$$

von $e_1 \ldots, e_k$ aufgespannt.

Hauptraume sind –invariante Unterraume. Es ist $V \quad V'$. Wenn $V' \neq \mathbf{0}$, ist Eigenwert.

Lemma 5.3.1 *Wenn*

$$p\ \ (x) = \prod_{i=1}^{e}(x \qquad {}_i)^{n_i},$$

wobei die $\ {}_i$ *paarweise verschieden sind, ist*

$$\dim(V'_{\ i}) = n_i.$$

Allgemeiner gilt: Die Dimension von V' ist die *Vielfachheit von* in p : das ist die grote Potenz von $(x \qquad)$, die p teilt.

Lemma 5.3.2 *Die Hauptraume sind unabhangig.*

Folgerung 5.3.3 *Wenn*

$$p\ \ (x) = \prod_{i=1}^{e}(x \qquad {}_i)^{n_i},$$

(die $\ {}_i$ *paarweise verschieden), ist* V *die direkte Summe der Hauptraume* $V\ \ {}_i$

Wenn V direkte Summe von –invarianten Unterraumen $V_1, \ldots, V_e$ ist, kann man Basen $\mathfrak{B}_i$ der V_i zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von V zusammenfassen. Wenn die V_i bezuglich der $\mathfrak{B}_i$ durch die Matrizen A_i dargestellt werden, wird bezuglich $\mathfrak{B}$ durch die *Blockmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & A_e \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Folgerung 5.3.4 *Wenn*

$$p\ \ (x) = \prod_{i=1}^{e}(x \qquad {}_i)^{n_i},$$

(die $\ {}_i$ *paarweise verschieden), kann bezuglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix dargestellt werden, deren Blocke* A_i $(i = 1, \ldots, e)$ n_i*-*n_i*–Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} {}_i & & & \\ 0 & {}_i & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & {}_i \end{pmatrix}$$

sind.

Lemma 5.3.5

1. *ist genau dann Nullstelle von* $p(x)$*, wenn* $(x \qquad)$ *ein Teiler von* $p(x)$ *ist*

2. *Ein Polynom vom Grad* n *hat hochstens* n *verschiedene Nullstellen.*

Ein Korper heit *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle besitzt. Der Korper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen. Jeder Korper lat sich in einen algebraisch abgeschlossenen Korper einbetten.

Folgerung 5.3.6 *In einem algebraisch abgeschlossenen Korper zerfallt jedes normierte Polynom (eindeutig) in Linearfaktoren.*

5.4 Nilpotente Endomorphismen

Denition *Eine Endomorphismus heit nilpotent, wenn eine Potenz* ^{n} *Null ist. Eine quadratische Matrix A heit nilpotent, wenn* f_A *nilpotent ist.*

Sei Endomorphismus eines endlich–dimensionalen Vektorraums V. Dann ist genau dann nilpotent, wenn $V = V_0'$. Der Hauptraum V' ist der grote Unterraum von V, auf den eingeschrankt id nilpotent ist.

Lemma 5.4.1 *Sei Endomorphismus eines* n*–dimensionalen Vektorraums* V*. Dann sind aquivalent:*

1. *ist nilpotent*
2. $^n = 0$
3. *Bei geeigneter Basiswahl lat sich durch eine obere Dreiecksmatrix darstellen, in deren Diagonale nur Nullen stehen.*
4. $\mathrm{P}\ (x) = x^n$

Satz 5.4.2 *Sei nilpotenter Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums* V *und* v *ein Element von* V*. Sei* k *die kleinste naturliche Zahl, fur die* $^k(v) = 0$*. Dann bildet die Folge*

$$v = \ ^0(v),\ ^1(v),\ ^2(v), \ldots,\ ^{k\ 1}(v) = 0$$

eine Basis eines –invarianten Unterraums U *von* V*.*

Man nennt U den von v *erzeugten zyklischen* Unterraum (der Ordnung k).

Satz 5.4.3 *Sei nilpotenter Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums* V*. Dann ist* V *direkte Summe von zyklischen Unterraumen.*

Beweisskizze:

Die Raume $U_i = \mathrm{Ker}(\ ) \cap \mathrm{Im}(\ ^i)$ bilden eine absteigende Folge

$$\mathrm{Ker}(\ ) = U^0 \quad U^1 \quad \ldots \quad U^n = 0$$

von –invarianten Unterraumen. Wir wahlen eine Basis $a_1^n, \ldots, a_{m_n}^n$ von $U^{n\ 1}$. Dann erweitern wir diese Basis um $a_1^{n\ 1}, \ldots, a_{m_{n\ 1}}^{n\ 1}$ zu einer Basis von $U^{n\ 2}$ und fahren so fort. Schlielich erhalten wir eine Basis (a_j^i), $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m_i)$ von Ker( ), soda jeweils $\ a_j^{i'} \mid i < i';\ j < m_{i'}\ $ eine Basis von U^i ist.
Dann wahlen wir zu jedem a_j^i einen Vektor v_j^i mit $^{i\ 1}(v_j^i) = a_j^i$. Jedes dieser v_j^i erzeugt einen zyklischen Unterraum V_j^i der Ordnung i. V ist die direkte Summe der V_j^i.

Im Folgenden verwenden wir die Notation B^k fur die k-k–Matrix

$$\begin{pmatrix} & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Folgerung 5.4.4 *Ein nilpotenter Endomorphismus eines endlich–dimensionalen Vektorraums lat sich bezuglich einer geeigneten Basis durch eine aus Matrizen B_0^k zusammengesetzte Blockmatrix schreiben.*

Wie oft eine Matrix B_0^k in der Blockmatrix vorkommt hangt nicht von der Wahl der Basis ab.

Als letzte Folgerung ergibt sich der Satz von der *Jordan Normalform*

Satz 5.4.5 *Ein Endomorphismus eines endlich–dimensionalen Vektorraums dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfallt, lat sich bez uglich einer geeigneten Basis durch eine aus Matrizen B^k zusammengesetzte Blockmatrix schreiben.*

Wie oft eine Matrix B^k in der Blockmatrix vorkommt hangt nicht von der Wahl der Basis ab.

Kapitel 6

Dualitat

$\Re$R

6.1 Der Dualraum

Denition *Der Dualraum V eines K–Vektorraums V ist der Vektorraum alle linearen Funktionale* $: V \to K$.

In fruherer Notation ist also V =L(V, K).

Identiziert man den K^n mit dem Raum der n–dimensionalen Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} {}_1 \\ \vdots \\ {}_n \end{pmatrix},$$

kann man (K^n) als den Raum aller Zeilenvektoren

$$= ({}_1, \ldots, {}_n)$$

auffassen, wobei

$$(x) = {}_1 {}_1 + \quad + {}_n {}_n = ({}_1, \ldots, {}_n) \begin{pmatrix} {}_1 \\ \vdots \\ {}_n \end{pmatrix}.$$

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V. Die Funktionale ${}_1, \ldots, {}_n$, deniert durch

$$_i(x_j) = {}_{ij},$$

bilden eine Basis von V , die sogenannte *duale* Basis.

Folgerung 6.1.1 *Wenn V endlich–dimensional ist, hat V die gleiche Dimension wie V.*

V und V sind also isomorph. Ein Isomorphismus f lat sich zum Beispiel dadurch angeben, da man die Elemente einer Basis $x_1, \ldots, x_n$ auf die Elemente ${}_1, \ldots, {}_n$ der dualen Basis abbildet. f

hangt allerdings von der Wahl der Basis $x_1, \ldots, x_n$ ab. Man sagt, da V und V nicht *kanonisch* isomorph sind.

Sei nun V beliebig (nicht notwendig endlich–dimensional). Jedes Element x von V deniert verm oge $\mapsto (x)$ eine lineare Abbildung x' von V nach K. $x \mapsto x' = (\ x)$ ist die "kanonische" Abbildung von $: \ V \to V$.

Lemma 6.1.2 *Die kanonische Abbildung von V nach V ist eine injektive lineare Abbildung.*

Wenn V endlich dimensional ist, sind also V und V kanonisch isomorph.

Lemma 6.1.3 *Wechselt man eine Basis von V mittels der Matrix A, so wechseln die dualen Basen von V mit $(A^\top)^{\ 1}$.*

6.2 Duale Abbildungen

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ induziert vermoge

$$f \ (\ ) = \qquad f$$

eine lineare Abbildung $f \ : W \ \to V$, die *duale Abbildung.* f ist also charakterisiert durch das Bestehen der Gleichung $(f \ (\ ))(x) = \ (f(x))$

Lemma 6.2.1 *Dualisieren ist ein kontravarianter, linearer Funktor: Es gilt*

1. $(\mathrm{id}_V) \ = \mathrm{id}_V$
2. *Wenn $f : U \to V$ und $g : V \to W$ linear sind, ist $(g \quad f) \ = f \quad g$.*
3. *Wenn f und g lineare Abbildungen von V nach W sind, ist $(f + g) \ = f \ + g$*
4. *Fur alle $\ \in K$ ist $(f \ ) \ = f$.*

Auerdem ist der Funktor treu*: $f \ = 0 \Rightarrow f = 0$.*
Fur endlich–dimensionale Vektorraume ist der Funktor voll*: Fur jedes $g : W \ \to V$ gibt es ein $f : V \to W$ mit $f \ = g$.*

Identiziert man wie oben die Elemente von K^m und K^n mit Spaltenvektoren und die Elemente der Dualraume mit Zeilenvektoren, so wird fur eine m-n–Matrix A die Abbildung $f = f_A : K^n \to K^m$ gegeben durch

$$f : x \mapsto Ax$$

und f durch

$$f \ : \quad \mapsto A.$$

Daraus ergibt sich:

Satz 6.2.2 *V und W seien endlich–dimensional und $f : V \to W$ linear. Wenn f bezuglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch die Matrix A gegeben ist, ist f bezuglich der dualen Basen durch die Transponierte $A^\top$ gegeben.*

Folgerung 6.2.3 *Fur Endomorphismen von endlich–dimensionalen Vektorraumen gilt* $\det(\ ) = \det(\ )$.

Lemma 6.2.4 *Der Dualraum einer direkten Summe lat sich auf nat urliche Weise mit der direkten Summe der Dualraume identizieren:*

$$(V \quad W) \ = V \quad W \ .$$

Das Duale der Einbettung $V \to V \bigoplus W$ *ist die Projektion* $V \quad \bigoplus W \quad \to V$ *. Das Duale der Projektion* $V \bigoplus W \to V$ *ist die Einbettung* $V \quad \to V \quad \bigoplus W$ *.*

Folgerung 6.2.5 *Sei* $f : V \to W$ *linear. Dann gilt:*

1. f *ist genau dann surjektiv, wenn* f *injektiv ist.*
2. f *ist genau dann injektiv, wenn* f *surjektiv ist.*
3. *Wenn* W *endlich–dimensional ist, haben* f *und* f *den gleichen Rang.*

6.3 Duale Paare

V und W seien endlich dimensionale K–Vektorraume und

$$(\, , \,) : V \quad W \to K$$

bilinear.

Sei $\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ eine Basis von V und $\mathfrak{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ eine Basis von W. Nach Lemma 2.5.1 ist $(\, , \,)$ durch die m-n–Matrix $B = (x_i, y_j)$ eindeutig bestimmt.

Die auf $K^m \quad K^n$ bezuglich der kanonischen Basen durch B gegebene Bilinearform bezeichnen wir mit $(\, , \,)_B$. Fat man die Elemente von K^m und K^n als Spaltenvektoren auf, ist

$$(x, y)_B = x^\top By.$$

Lemma 6.3.1 *Wenn man mit der Matrix* D *zur Basis* $\mathfrak{X}'$ *wechselt (siehe Abschnitt 3.3) und mit* E *von* $\mathfrak{Y}$ *zur Basis* $\mathfrak{Y}'$*, wird* $(\, , \,)$ *bezuglich der neuen Basen durch*

$$B' = D^\top BE$$

beschrieben.

Der Rang der darstellenden Matrix von $(\, , \,)$ hangt also von der Basiswahl nicht ab. Man nennt ihn den *Rang von* $(\, , \,)$.

Denition *Das Tripel* $V, W, (\, , \,)$ *heit duales Paar, wenn* $\dim(V) = \dim(W) =$ *Rang von* $(\, , \,)$.

Wenn V, W ein duales Paar sind, dann auch W, V. Dabei mu man nat urlich von $(\, , \,)$ zur Bilinearform $(y, x)' = (x, y)$ ubergehen.

Setzt man fur endlich–dimensionales $W \quad V = W$ und $(, x \ ) = \ (x)$, bilden V und W ein duales Paar. Das nachste Lemma zeigt, da jedes duale Paar so aussieht.

Lemma 6.3.2 *Bilineare Abbildungen* $(\, , \,) : V \quad W \to K$ *und lineare Abbildungen* $: \quad V \to W$ *entsprechen einander vermoge* $(\quad v)(w) = (v, w)$*. Wenn* W *endlich–dimensional ist, ist bilden* V *und* W *genau dann ein duales Paar, wenn* *ein Isomorphismus ist.*

Wenn V und W ein duales Paar bilden gibt es zu jeder Basis $\mathfrak{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ von W eine Basis $\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ von V mit $(x_i, y_j) = {}_{ij}$. $\mathfrak{X}$ ist *dual* zu $\mathfrak{Y}$.

Sei nun (V, W) ein duales Paar und f ein Endomorphismus von W. Dann ist $f^t = {}^{1}\ f$ der zu f *adjungierte* Endomorphismus von W. Wie in 6.2.2 wird f^t bzgl. der dualen Basis durch die transponierte Matrix dargestellt.

Lemma 6.3.3 *$f^t(x)$ ist bestimmt durch die Gultigkeit der Gleichung $(f^t(x), y) = (x, f(y))$ fur alle $y \in W$.*

Fur Endomorphismen f von V deniert man f^t analog durch Vertauschen von Rechts und Links. Man hat dann $f^{tt} = f$.

Fur ein duales Paar V, W und Unterraume U von V denieren wir:

$$U^{\perp} = \{w \in W \mid \forall u \in U \ (u, w) = 0\}$$

Lemma 6.3.4

1. *$(U^{\perp})^{\perp} = U$*
2. *Mit der Bilinearform*
$$[x + U, y] = (x, y)$$
wird $V/U, U^{\perp}$ zu einem dualen Paar. Es folgt $\dim U + \dim(U^{\perp}) = \dim V$.

Kapitel 7

Symmetrische Bilinearformen

7.1 Bilinearformen

Wir betrachten Bilinearformen $(\ ,\ ) : V \quad V \to K$.

$(\ ,\ )$ heit *regular* oder *nicht ausgeartet*, wenn V, V zusammen mit $(\ ,\ )$ ein duales Paar ist.

Ein Automorphismus von $(V, (\ ,\ ))$ ist ein Automorphismus f von V, der mit $(\ ,\ )$ vertraglich ist, fur den also $(f(x), f(y)) = (x, y)$ fur alle $x, y \in V$.

Lemma 7.1.1 *Sei V endlich–dimensional und $(\ ,\ )$ regular. Dann ist f genau dann ein Automorphismus von $(V, (\ ,\ ))$, wenn $f \quad f^t = id_V$.*

Lemma 7.1.2 *Sei V endlich–dimensional und $(\ ,\ )$ regular. Dann hat jede Bilinearform $[\ ,\ ]$ auf V die Gestalt*

$$[x, y] = (f(x), y)$$

fur einen eindeutig bestimmten Endomorphismus f.

7.2 Symmetrische Bilinearformen

Im Folgenden sei K ein Korper, der nicht die Charakteristik 2 hat und V ein K–Vektorraum.

Denition *Eine Bilinearform $(\ ,\ ) : V \quad V \to K$ heit symmetrisch, wenn $(v, w) = (w, v)$ fur alle $v, w \in V$.*

$(\ ,\ )_B$ ist genau dann symmetrisch, wenn $_{i,j} = \ _{j,i}$ fur alle i, j (vgl. Folgerung 2.5.3). Quadratische Matrizen mit dieser Eigenschaft heien *symmetrisch*.

Lemma 7.2.1 *Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische regulare Bilinearform auf V und f ein Endomorphismus. Dann ist die Bilinearform $(f(x), x)$ genau dann symmetrisch, wenn $f = f^t$.*

Endomorphismen f mit $f^t = f$ heien *selbstadjungiert*.

Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Die Funktion $q : V \to K$, deniert durch

$$q(x) = (x, x),$$

nennt man die zu $(\ ,\ )$ gehorende *quadratische Form.* $(\ ,\ )$ lat sich durch q ausdrucken:

$$(x, y) = \frac{q(x+y) \quad q(x \quad y)}{4}.$$

Folgerung 7.2.2 *Eine symmetrische Bilinearform ist durch ihre quadratische Form eindeutig bestimmt.*

Satz 7.2.3 *Symmetrische Bilinearformen auf endlich–dimensionalen Vektorraumen lassen sich bei geeigneter Basiswahl durch Diagonalmatrizen darstellen.*

Eine andere Formulierung ist: Jeder endlich–dimensionale Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform hat eine *Orthogonalbasis.* Das ist eine Basis $a_1, \ldots, a_n$, deren Elemente paarweise *orthogonal* sind:

$$(a_i, a_j) = 0, \text{ wenn } \quad i \neq j.$$

Folgerung 7.2.4 *Wenn in K jedes Element Quadrat ist (wie zum Beispiel in $\mathbb{C}$), dann wird bei geeigneter Basiswahl jede symmetrische Bilinearform durch eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Die Zahl der vorkommenden Einsen ist der Rang der Bilinearform und also von der Wahl der Basis unabhangig.

Folgerung 7.2.5 *Uber $\mathbb{R}$ lat sich jede symmetrische Bilinearform bei geeigneter Basiswahl immer durch eine Diagonalmatrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen, in deren Diagonalen nur $1, \quad 1$ *und* 0 *vorkommen.*

Sei p die Zahl der vorkommenden Einsen, q die Zahl der Minuseinsen, und r die Zahl der Nullen, die in der Diagonalen dieser Matrix vorkommen.

Satz 7.2.6 (Sylvester) *p, q und r sind von der Wahl der diagonalisierenden Basis unabhangig.*

Man nennt $p \quad q$ die Signatur der Bilinearform. Weil $p+q$ der Rang der Bilinearform ist, ist der Satz von Sylvester aquivalent zur Invarianz der Signatur.

7.3 Euklidische Raume

Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische Bilinearform auf dem reellem Vektorraum V mit quadratischer Form q. $(\ ,\ )$ heit *positiv semidenit* , wenn $q(x)$ niemals negativ wird. Wenn sogar $q(x)$ fur alle von 0 verschiedenen x positiv ist, heit $(\ ,\ )$ *positiv denit* . Analog deniert man *negativ (semi)denit* . Symmetrische Bilinearformen, die nicht semidenit sind, nennt man *indenit* . Fur eine Diagonalmatrix B ist $(\ ,\ )_B$ genau dann positiv (semi)denit, wenn alle Diagonalelemente von B positiv (nicht-negativ) sind.

Denition *Eine euklidische Bilinearform ist eine positiv denite symmetrische Bilinearform auf einem endlich–dimensionalen reellen Vektorraum. Ein euklidischer Raum ist ein reeller Vektorraum mit einer euklidischen Bilinearform.*

Das in 1.4 denierte Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist euklidisch.

Aus 7.2.5 folgt:

Satz 7.3.1 *Jeder euklidische Vektorraum hat eine* Orthonormalbasis. *Das ist eine Basis $b_1, \ldots, b_m$, die zu sich selbst dual ist, fur die also*

$$(b_i, b_j) = \quad _{ij}.$$

Es folgt, da jeder euklidische Vektorraum V zu einem $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt isomorph ist. Insbesondere ist V regular.

Ausgehend von einer Basis $a_1, \ldots, a_n$ von V lat sich mit dem *Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren* eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ konstruieren: Wir setzen $b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1$ und fur $i = 2, \ldots, n$

$$b'_i = a_i \quad (a_i, b_1) b_1 \quad \ldots \quad (a_i, b_{i \ 1}) b_{i \ 1}$$

und

$$b_i = \frac{1}{\| b'_i \|} b'_i.$$

Wie in 1.4 ist dabei $\| a \|$ die Norm oder Lange $\sqrt{(a,a)}$ von a .

Lemma 7.3.2 *Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis. Dann ist fur alle $a \in V$*

$$a = (a, b_1) b_1 + \ldots + (a, b_n) b_n.$$

Lemma 7.3.3 *Sei U ein Unterraum des euklidischen Raums V. Dann ist V direkte Summe von U und $U^\perp$.*

Daraus folgt, da sich jedes orthonormale System von Vektoren zu einer Orthonormalbasis von V fortsetzen lat.

Lemma 7.3.4 *Sei f ein Endomorphismus von V, der bezogen auf die Orthonormalbasis $\mathfrak{B}$ durch die Matrix A dargestellt wird. Dann wird der adjungierte Endomorphismus f^t durch die transponierte Matrix $A^\top$ dargestellt.*

Automorphismen eines euklidischen Vektorraums heien *orthogonal.*

Lemma 7.3.5 *Sei f ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraums V, der bezuglich einer Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_m$ durch die Matrix A dargestellt wird. Dann sind aquivalent:*

1. *f ist orthogonal.*
2. *$f \quad f^t = id_V$.*
3. *$AA^\top = \mathbf{I}$.*
4. *$f(b_1), \dots, f(b_m)$ ist eine Orthonormalbasis.*

Folgerung 7.3.6 *Orthogonale Abbildungen haben die Determinante 1 oder -1.*

Die *reelle orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \quad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^\top = \mathbf{I}$$

ist die Gruppe aller orthogonalen n-n–Matrizen. Die orthogonalen Abbildungen mit Determinante 1 bilden die *spezielle* orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Sei V ein n–dimensionaler euklidischer Vektorraum. Eine n–Form heit *normiert*, wenn

$$(b_1, \dots, b_m) \in \{ \quad 1, 1\}$$

fur alle Orthonormalbasen $b_1, \dots, b_m$.

Lemma 7.3.7 *Wenn $V \neq 0$, gibt es genau zwei normierte n–Formen: $\;_0$ und $\;_0$.*

Man nennt

$$\| \quad _0(a_1, \dots, a_n) \|$$

das *Volumen* des Parallelepipeds $\{ \;_1 a_1 + \dots + \;_n a_n \mid 0 \quad _1 \quad 1, \dots, 0 \quad _n \quad 1\}$.

Satz 7.3.8 (Gramsche Determinante) *Das Volumen des von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannten Parallelepipeds ist die Quadratwurzel der* Gramschen *Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & & (a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

7.4 Die Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer Vektorraum.

Satz 7.4.1 *Sei* $[\ ,\ ]$ *eine symmetrische Bilinearform auf* V*. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von* V*, bezuglich der* $[\ ,\ ]$ *durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.*

Weil sich vermoge

$$[x, y] = (f(x), y)$$

symmetrische Bilinearformen und selbstadjungierte Endomorphismen entsprechen (7.1.2 und 7.2.1), ist der Satz gleichbedeutend mit

Satz 7.4.2 *Sei* f *ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von* V *aus Eigenvektoren von* f*.*

Fur Matrizen formuliert:

Satz 7.4.3 *Zu jeder symmetrischen reellen Matrix* A *gibt es eine orthogonale Matrix* D*, soda* $D^\top AD$ *Diagonalgestalt hat.*

Eine Folgerung ist zum Beispiel:

Lemma 7.4.4 *Fur jeden Endomorphismus* f *gibt es eine Orthonormalbasis* $b_1, \ldots, b_n$ *von* V*, soda* $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ *paarweise orthogonal sind.*

Die Matrixformulierung: Jede quadratische Matrix lat sich als Produkt $O_1 D O_2$ schreiben, wobei O_1 und O_2 orthogonal sind und D eine Diagonalmatrix.

Sei nun bezuglich einer Orthonormalbasis die symmetrische Bilinearform $[x, y] = (f(x), y)$ durch die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} {}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & {}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & {}_n \end{pmatrix}$ gegeben. Die ${}_i$ sind als die Eigenwerte von f bestimmt. Der nachste Satz zeigt die Bedeutung der ${}_i$ fur die Bilinearform $[\ ,\ ]$. Wir konnen annehmen, da ${}_1 \quad {}_2 \quad \cdots \quad {}_n$.

Satz 7.4.5

$${}_m = \min\{\max\{[x, x] \mid x \in U,\ \| x \|= 1\} \mid U \quad V,\ \dim U = m\}$$

7.5 Unitare Raume

Wir betrachten in diesem Abschnitt Vektorraume $U, V, \ldots$ uber dem Korper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\overline{a + bi} = a \quad bi$$

ist ein Automorphismus des Korpers $\mathbb{C}$, die *Konjugation*.

Denition *Eine Abbildung* $f : U \to V$ *heit semilinear, wenn*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(x \quad) = \overline{f} \quad (x)$

Sei V ein Vektorraum uber $\mathbb{C}$. Der *konjugierte* Vektorraum $V^{(c)}$ hat die gleichen Elemente wie V und die gleiche Addition. Die Multiplikation $^{(c)}$ mit Elementen von $\mathbb{C}$ ist aber deniert durch $^{(c)}\, v = \overline{v}\quad$.

Lemma 7.5.1 *Fur eine Abbildung $f : U \to V$ sind aquivalent*

1. *f ist semilinear.*
2. *$f : U \to V^{(c)}$ ist linear.*
3. *$f : U^{(c)} \to V$ ist linear.*

Denition *Eine Sesquilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung $(\ ,\ ) : V^{(c)} \quad V \to \mathbb{C}$.*

Sei $\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von V. Dann ist die Sesquilinearform $(\ ,\ )$ durch die n-n–Matrix $B = (x_i, x_j)$ eindeutig bestimmt: Wenn fur Spaltenvektoren und

$$x = (x_1 \ldots x_n)$$

und

$$y = (x_1 \ldots x_n),$$

ist

$$(x, y) = \quad B.$$

Hier steht A fur die *adjungierte* Matrix $\overline{A}^{\top}$

Wenn $(\ ,\ )$ eine Sesquilinearform ist, ist auch

$$[x, y] = \overline{(y, x)}$$

sesquilinear.

Denition *Eine Sesquilinearform heit hermitesch, wenn*

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

fur alle x, y.

Eine bezuglich einer Basis durch die Matrix B gegebene Sesquilinearform ist genau dann hermitesch, wenn B *hermitesch* ist. Das heit

$$B \quad = B.$$

Wenn $(\ ,\ )$ hermitesch ist, ist $(x, x) \in \mathbb{R}$ fur alle x.

Denition *Eine hermitesche Bilinearform heit positiv denit, wenn $\quad (x, x) > 0$ fur alle von Null verschiedenen x. Eine unitarerVektorraum ist ein endlich–dimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum mit einer positiv deniten hermiteschen Sesquilinearform.*

$\mathbb{C}^n$ mit der Standardsesquilinearform $^{-}$ ist unitar.

Wir setzen wieder $\| a \| = \sqrt{(a,a)}$. Es ist $\| a + b \| \| \| \quad a \| + \| b \|$ und $\| a \quad \| = | \quad | \| a \|$.

Lemma 7.5.2

1. *Unitare Bilinearformen sind regular.*
2. *Sei U ein Unterraum des unitaren Raums V. Dann ist V direkte Summe von U und $U^{\perp}$.*
3. *Jeder unitare Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis. (Also ist V zum unitaren Raum $\mathbb{C}^n$ isomorph.)*
4. *Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis. Dann ist fur alle $a \in V$*

$$a = (b_1, a)b_1 + \ldots + (b_n, a)b_n.$$

Satz 7.5.3 *Sei V ein unitarer Vektorraum. Zu jedem Endomorphismus f von V gibt es einen durch $(f^t(x), y) = (x, f(y))$ eindeutig bestimmten* adjungierten *Endomorphismus f^t. Wenn f bezuglich einer Orthonormalbasis durch die Matrix A dargestellt wird, wird f^t durch die adjungierte Matrix A dargestellt.*

Sei V unitar. Dann entsprechen sich Sesquilinearformen und Endomorphismen von V vermoge

$$[x, y] = (f(x), y).$$

[,] ist genau dann hermitesch, wenn f selbstadjungiert ist.

Automorphismen eines unitaren Vektorraums heien *unitar.*

Lemma 7.5.4 *Sei f ein Endomorphismus des unitaren Vektorraums V, der bezuglich einer Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_m$ durch die Matrix A dargestellt wird. Dann sind aquivalent:*

1. *f ist unitar.*
2. *$f \quad f^t = id_V$.*
3. *$AA \quad = \mathbf{I}$.*
4. *$f(b_1), \ldots, f(b_m)$ ist eine Orthonormalbasis.*

Folgerung 7.5.5 *Der Absolutbetrag einer Determinante einer unitaren Abbildung ist* 1.

Die *unitare Gruppe*

$$\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid AA \quad = \mathbf{I}\}$$

ist die Gruppe aller unitaren n-n–Matrizen. Die unitaren Abbildungen mit Determinante 1 bilden die *spezielle* Gruppe SU_n.

Denition *Ein Endomorphismus eines unitaren Vektorraums heit normal, wenn $f \quad f^t = f^t \quad f$.*

Selbstadjungierte und unitare Endomorphismen sind normal.

Satz 7.5.6 *f ist genau dann normal, wenn f eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren hat.*

Ein normaler Endomorphismus ist selbstadjungiert, wenn seine Eigenwerte reell sind. Und unitar, wenn die Eigenwerte den Betrag 1 haben.

Kapitel 8

Multilineare Algebra

In diesem Kapitel betrachten wir Vektorraume uber einem beliebigen Korper K.

8.1 Tensorprodukt

U und V seien zwei Vektorraume. Ein Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\ : U \quad V \to T$ heit *Tensorprodukt* von U und V, wenn sich jede bilineare Abbildung $(\, , \,) : U \quad V \to W$ als Komposition von mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $f : T \to W$ schreiben lat.

$$\begin{tikzcd}
U \quad V \arrow[rr] \arrow[drr, "{(\, , \,)}"'] & & T \arrow[d, "f"] \\
& & W
\end{tikzcd}$$

Satz 8.1.1 *Je zwei Vektorraume U und V haben ein Tensorprodukt $\ : U \quad V \to T$. T ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinn: Wenn $\ ' : U \quad V \to T'$ ein zweites Tensorprodukt ist, gibt es genau einen Isomorphismus $t : T \to T'$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
U \quad V \arrow[rr] \arrow[drr, "{'}"'] & & T \arrow[d, "t"] \\
& & T'
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Wir wahlen fur alle Paare U und V ein Tensorprodukt aus und bezeichnen es mit $U \bigotimes V$.

Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich:

Folgerung 8.1.2 *Wenn $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von U und $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von V ist, ist $(a_i \quad b_j)_{i\in I,\, j\in J}$ eine Basis von $U \bigotimes V$.*

Wenn U und V endlich–dimensional sind, ist also $\dim(U \quad V) = \dim U \quad \dim V$.

Lemma 8.1.3 *Die kanonische Abbildung $K \bigotimes V \to V$ ist ein Isomorphismus.*

Fur zwei lineare Abbildungen $f : U \to U'$ und $g : V \to V'$ deniert man die lineare Abbildung

$$f \quad g : U \bigotimes V \to U' \bigotimes V'$$

durch $(f \quad g)(u \quad v) = f(u) \quad g(v)$. $\bigotimes$ wird auf diese Weise zu einem linearen Bifunktor:

Lemma 8.1.4

1. $\mathrm{id}_U \quad \mathrm{id}_V = id_{U \bigotimes V}$
2. $(f \quad f') \quad (g \quad g') = (f \quad g) \quad (f' \quad g')$
3. $(f + f') \quad g = (f \quad g) + (f' \quad g)$
4. $(f \quad) \quad g = \quad (f \quad g)$

Beispiel

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Dann ist $\mathbb{C} \bigotimes V$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $(\quad v) = (\quad) \quad v$.

Das Tensorprodukt einer endlichen Familie $V_1, \ldots, V_n$ von Vektorraumen ist ein Vektorraum

$$V_1 \bigotimes \ldots \bigotimes V_n$$

zusammen mit einer multilinearen Abbildung $\quad : V_1 \quad \ldots \quad V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, so da sich jede multilineare Abbildung $V_1 \quad \ldots \quad V_n \to W$ eindeutig in der Form $f \quad$ fur ein lineares $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ schreiben lat. Existenz und Eindeutigkeit zeigt man wie oben.

Satz 8.1.5

1. *Durch $(u_1 \quad \ldots \quad u_m) \quad (v_1 \quad \ldots \quad v_n) \mapsto u_1 \quad \ldots \quad u_m \quad v_1 \quad \ldots \quad v_n$ ist ein Isomorphismus zwischen $(U_1 \otimes \ldots \otimes U_m) \bigotimes (V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$ und $U_1 \otimes \ldots \otimes U_m \otimes V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ deniert.*
2. *$U \bigotimes V$ und $V \bigotimes U$ sind kanonisch isomorph. Der Isomorphismus wird durch $u \quad v \mapsto v \quad u$ gegeben.*

Sei $\bigotimes^0 = K$ und (fur positive p) $\bigotimes^p V$ das Tensorprodukt von p Kopien von V. Dann ist nach dem vorhergehenden Satz fur alle p und q eine bilineare Abbildung $\quad : \bigotimes^p V \quad \bigotimes^q V \to \bigotimes^{p+q} V$ deniert. Wenn $\quad p$ oder q Null sind, soll diese Abbildung Multiplikation mit Elementen von K sein.

Satz 8.1.6 *Die Abbildungen* $: \bigotimes^p V \quad \bigotimes^q V \to \bigotimes^{p+q} V$ *machen*

$$\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \left(\bigotimes^{p} V \right)$$

zu einer assoziativen Algebra mit Einselement, der Tensoralgebra von V*.*

<u>Beispiel</u>

$\mathrm{T}(K) = K[X]$

8.2 Tensorprodukt und Dualitat

Die durch die bilineare Abbildung $(\ , x\ ) \mapsto\ (x)$ denierte lineare Abbildung

$$\mathrm{v} : V \quad \bigotimes V \to K$$

heit *Verjungung*.

Allgemeiner nennt man die durch $a_1 \quad \ldots \quad b_1 \quad \ldots v \quad \ldots c_1 \quad \ldots \mapsto \ (v) a_1 \quad \ldots b_1 \quad \ldots c_1 \quad \ldots$ denierte lineare Abbildung

$$A_1 \bigotimes \ldots V \quad \bigotimes B_1 \bigotimes \ldots V \bigotimes \ldots C_1 \quad \ldots \to A_1 \bigotimes \ldots B_1 \bigotimes \ldots C_1 \bigotimes \ldots$$

Verjungung (uber den Faktoren V und V).

Die Elemente von

$$V_p^q = (\bigotimes^p V) \bigotimes (\bigotimes^q V\ )$$

nennt man p–fach *kontravariante* und q–fach *kovariante* Tensoren (oder auch Tensoren der *Stufe* (p, q)). Tensorieren liefert eine lineare Abbildung

$$V_p^q \quad V_{p'}^{q'} \to V_{p+p'}^{q+q'}.$$

Verjungen uber der i–ten Kopie von V und der j–ten Kopie von V liefert eine Abbildung

$$^j_i : V_p^q \to V_{p\ \ 1}^{q\ \ 1}.$$

Die Verjungung

$$U \bigotimes V \quad \bigotimes V \to U$$

liefert fur jedes $a \in U \bigotimes V$ eine lineare Abbildung $f_a : V \to U$, deniert durch $f_a(v) = (\mathrm{id} \quad \mathrm{v})(a \quad v)$.

Satz 8.2.1 *Die durch* $a \mapsto f_a$ *denierte Abbildung* $U \bigotimes V \quad \to \mathrm{L}(V, U)$ *ist fur endlich–dimensionale* V *ein Isomorphismus.*

Man kann daher (im endlich–dimensionalen) $U \bigotimes V$ und $\mathrm{L}(V, U)$ identizieren. Dabei ergeben sich folgende Entsprechungen:

1. Matrizen:
   Sei (v_j) eine Basis von V, (u_i) eine Basis von U und die lineare Abbildung $f : V \to U$ gegeben durch die Matrix $(\ _{i,j})$. Sei $(\ _j)$ die zu (v_j) duale Basis von V . Dann ist (bei der obigen Identizierung)
$$f = \sum_{i,j} \ _{i,j}(u_i \quad _j).$$

2. Komposition:
   Die Komposition von linearen Abbildungen ist eine bilineare Abbildung
$$: \mathrm{L}(V, W) \quad \mathrm{L}(U, V) \to \mathrm{L}(U, W).$$
   Sie entspricht der Verjungung
$$(W \bigotimes V \ ) \bigotimes (V \bigotimes U \ ) \to W \bigotimes U \ .$$

3. Duale Abbildung:
   Die Dualisierung $\mathrm{L}(U, V) \to \mathrm{L}(V \ , U \ )$, deniert durch $f \mapsto f$ entspricht der Abbildung
$$V \bigotimes U \ \to U \ \bigotimes V = U \ \bigotimes V$$
   aus Satz 8.1.5(2).

4. Die Spurabbildung:
   $\mathrm{Tr} : \mathrm{End}(V) \to K$ ist nichts anderes als die Verjungung
$$V \bigotimes V \ \to K.$$

Zweimalige Verjungung
$$(\qquad) \quad (u \quad v) \mapsto \ (u) \ (v)$$
liefert eine bilineare Abbildung $(U \ \otimes V \ ) \quad (U \otimes V) \to K$.

Satz 8.2.2 *Wenn U und V endlich–dimensional sind, bilden $U \ \otimes V$ und $U \otimes V$ mit der eben denierten bilinearen Abbildung ein duales Paar.*

$(U \otimes V)$ kann also mit $U \ \otimes V$ identiziert werden.

8.3 Die auere Algebra

Sei V ein K–Vektorraum und p eine naturliche Zahl. Ein Vektorraum A zusammen mit einer (p–stelligen) multilinearen alternierenden Abbildung $\wedge^p : V^p \to A$ heit *p-fache auere Potenz* von V, wenn sich jede alternierende multilineare Abbildung $a : V^p \to W$ als Komposition von $\wedge^p$ mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $f : A \to W$ schreiben lat.

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[r, "\wedge^p"] \arrow[dr, "a"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

Wir schreiben

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$$

fur $\wedge^p(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

Satz 8.3.1 *V hat fur alle p eine p–fache auere Potenz $\wedge^p : V^p \to A$. A ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinn: Wenn $\wedge' : V^p \to A'$ eine zweite p–fache auere Potenz von V ist, gibt es genau einen Isomorphismus $a : A \to A'$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[r, "\wedge^p"] \arrow[dr, "\wedge'"'] & A \arrow[d, "a"] \\
& A'
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Wir wahlen fur alle V und p eine p–fache auere Potenz aus und bezeichnen sie mit $\bigwedge^p V$. Fur $p = 0$ ist der Sinn der Denition nicht ganz klar; man vereinbart $\bigwedge^0 V = K$. Die Elemente von $\bigwedge^p V$ heien die *p–Vektoren* von V.

Betrachtet man die Denition der aueren Potenz im Fall $W = K$, sieht man, da sich der Raum $\mathrm{A}^p V$ aller p–Formen auf V mit dem Dualraum $(\bigwedge^p V)$ identizieren l at: Jedes $\in \mathrm{A}^p V$ lat sich schreiben als $(v_1, \ldots, v_p) = (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p)$ fur ein $\in (\bigwedge^p V)$.

Sei $e_1, e_2, \ldots e_n$ eine Basis von V. Fur alle p–elementigen Teilmengen I von $\{1, \ldots, n\}$ sei

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},$$

wobei $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ eine monotone Aufzahlung von I ist. Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich:

Folgerung 8.3.2 *Die e_I bilden eine Basis von $\bigwedge^p V$.*

Wenn $\dim V = n$, ist also

$$\dim(\bigwedge^p V) = \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} .$$

Insbesondere ist $\dim(\bigwedge^n V) = 1$ und $\dim(\bigwedge^p V) = 0$ fur alle $p > n$. $\bigwedge^1 V$ und V sind kanonisch isomorph.

Wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ vermoge

$$(v_1 \ldots v_p) = (e_1 \ldots e_n)A$$

durch die n-p–Matrix A gegeben sind, ist

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \sum_{|I|=p} \det(A_I) e_I.$$

Dabei besteht die p-p–Matrix A_I aus den Zeilen von A, deren Zeilennummern zu I gehoren.

Lemma 8.3.3 *Zu jeder linearen Abbildung* $\ : V \to U$ *gibt es eine lineare Abbildung* $\wedge^p \ : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p U$, *die eindeutig bestimmt ist durch*

$$\wedge^p \ (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = \ (v_1) \wedge \ldots \wedge \ (v_p).$$

$\bigwedge^p$ *wird dadurch zu einem linearen Funktor.*

Lemma 8.3.4 *Wenn* $\dim V = n$ *und* ein Endomorphismus von V *ist, ist* $\wedge^n \ = \det(\ )$.

Man beachte, da ein Endomorphismus eines eindimensionalen Raumes Multiplikation mit einem Korperelement ist.

Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von U und $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis von V. $\ : V \to U$ sei durch die m-n–Matrix A gegeben. Dann ist

$$\wedge^p \ (e_I) = \sum_J \det(A_{I,J}) e_J.$$

Dabei ist fur jede p–elementige Teilmenge I von $\{1, \ldots, m\}$ und J von $\{1, \ldots, n\}$ $A_{I,J}$ die Matrix der Elemente von A, deren Zeilenindex in I und deren Spaltenindex in J liegt.

Satz 8.3.5 *Fur alle p und q gibt es eine bilineare Abbildung*

$$\wedge : \bigwedge^p V \quad \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V,$$

gegeben durch $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \wedge (v_{p+1} \wedge \ldots \wedge v_{p+q}) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q}$.

Wenn p oder q gleich Null sind, nehmen wir fur $\wedge$ die Multiplikation mit Elementen von K.

Sei $e_1, e_2, \ldots e_n$ eine Basis von V. Wenn I eine p–elementige Teilmenge und J eine q–elementige Teilmenge von $\{1, \ldots n\}$ ist, ist

$$e_I \wedge e_J = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } \quad I \cap J \neq 0 \\ {}_{I,J} e_{I \cup J} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist, wenn $i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_q$ und $k_1 < \ldots < k_{p+q}$ die aufsteigenden Aufzahlungen von I, J und $I \cup J$ sind, $\;_{I,J}$ die Signatur der Permutation

$$\begin{matrix} i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q \\ k_1 \ldots k_{p+q} \end{matrix} \;,$$

die $i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q$ der Reihe nach auf $k_1 \ldots k_{p+q}$ abbildet.

Folgerung 8.3.6 *Die direkte Summe*

$$\bigwedge V = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \; \bigwedge^p V \Big)$$

wird durch die Abbildungen $\wedge$ *zu einer assoziativen Algebra mit Einselement. Wenn* $v \in \bigwedge^p V$ *und* $w \in \bigwedge^q V$*, ist* $v \wedge w = (\;\;1)^{pq} w \wedge v$.

$\bigwedge V$ heit die *auere Algebra* von V.

Satz 8.3.7 *Sei* $n = \dim(V)$ *und* $p + q = n$*. Wenn wir einen Isomorphismus* $\bigwedge^n V = K$ *xieren, werden* $\bigwedge^p V$ *und* $\bigwedge^q V$ *vermoge*

$$\wedge : \bigwedge^p V \quad \bigwedge^q V \to \bigwedge^n V = K$$

zu einem dualen Paar.

Folgerung 8.3.8 (Cramersche Regel) *Sei* $n = \dim(V)$ *und* *eine* n*–Form, dann ist fur alle* $v_1, \ldots, v_n$ *und alle* $x \in V$

$$(v_1, \ldots, v_n)x = \sum_{i=1}^{n} \;(v_1, \ldots, v_{i\;\;1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) v_i$$

Sei ein Endomorphismus von V und $\mathrm{adj}(\;\;) : V \to V$ der zu $\wedge^{n\;\;1} \;\; : \bigwedge^{n\;\;1} V \to \bigwedge^{n\;\;1} V$ adjungierte Endomorphismus. $\mathrm{adj}(\;\;)$ wird also bestimmt durch die Gultigkeit von

$$\mathrm{adj}(\;\;)(v_1) \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n = v_1 \wedge \;(v_2) \wedge \ldots \wedge \;(v_n)$$

fur alle $v_1, \ldots, v_n$ aus V.

Lemma 8.3.9 *Wenn (bezuglich einer Basis von* V*) durch die Matrix* A *dargestellt wird, wird* $\mathrm{adj}(\;\;)$ *durch die Adjunkte* $\mathrm{adj}(A)$ *dargestellt.*

Man nennt daher $\mathrm{adj}(\;\;)$ die Adjunkte von .

8.4 Auere Algebra und Dualit at

V sei in diesem Abschnitt endlich–dimensional, $n = \dim V$.

Lemma 8.4.1 *Durch*

$$< \;_1 \wedge \ldots \wedge \;_p, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p >= \det \begin{pmatrix} \;_1(v_1) & \ldots & \;_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \;_p(v_1) & \ldots & \;_p(v_p) \end{pmatrix}$$

wird eine bilineare Abbildung

$$< \, , \, >: \bigwedge^p V \quad \bigwedge^p V \to K$$

deniert.

Der nachste Satz zeigt, da man f ur endlich dimensionale V den Raum $\mathrm{A}^p V$ der p–Formen auf V mit $\bigwedge^p(V \ )$ identizieren kann.

Satz 8.4.2 *Wenn V endlich–dimensional ist, bilden $\bigwedge^p V$ und $\bigwedge^p V$ vermoge der eben denierten bilinearen Abbildung ein duales Paar.*

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V und $e_1, \ldots, e_n$ die duale Basis von V . Dann sind die Basen (e_I) und (e_I) (siehe 8.3.2) dual zueinander.

Die Algebrastruktur von $\bigwedge(V \ )$ ubertragen wir auf die direkte Summe $\mathrm{A}V = \bigoplus_{p \quad 0} \mathrm{A}^p V$.

Satz 8.4.3 *Sei V endlich–dimensional, eine p–Form und eine q–Form auf V. Dann berechnet sich die $p + q$–Form $\wedge$ durch*

$$(\ \wedge \ )(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum \ {}_{I,J} \ (v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}) \ (v_{j_1}, \ldots, v_{j_q}).$$

Dabei wird uber alle Zerlegungen von $\{1, \ldots, p+q\}$ in eine Menge $I = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ und eine Menge $J = \{j_1 < \ldots < j_q\}$ summiert.

Wenn $p = 1$, d.h. $\in V$, hat die Formel die einfache Gestalt:

$$(\ \wedge \ )(v_1, \ldots, v_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (\ 1)^{i \ 1} \ (v_i) \ (v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{q+1}).$$

Dabei bedeutet $\hat{v}$, da die Variable v ausgelassen wird.

Sei $\in \bigwedge^p V$. Dann ist durch $\mapsto \ \wedge$ eine lineare Abbildung $\bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V$ deniert. Die dazu duale Abbildung $\bigwedge^{p+q} V \to \bigwedge^q V$ nennen wir $\lrcorner$, das *innere Produkt* mit .

Denition *Die bilineare Abbildung $\lrcorner : \bigwedge^p V \quad \bigwedge^{p+q} V \to \bigwedge^q V$ ist deniert durch*

$$< \, , \quad \lrcorner x >=< \ \wedge \, , x > .$$

<u>Spezialfalle</u>

$p = 0$: $\lrcorner x \ = \ x$

$q = 0$: $\lrcorner x \ = \ < \, , x >$

Lemma 8.4.4 *Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V und $e_1, \ldots, e_n$ die duale Basis von V . Dann ist*

$$e_J \lrcorner e_H = \begin{cases} \quad 0 & , \quad \text{wenn} \quad J \ / \ H, \\ {}_{I,J} e_I & , \quad \text{wenn} \quad I \cup J = H. \end{cases}$$

Satz 8.4.5

1. $(\ \wedge \ ) \lrcorner x = \ \lrcorner (\ \lrcorner x)$

2. $< \ , \quad \lrcorner x >= (\quad 1)^{pq} < \ , \quad \lrcorner x >$

3. *Wenn* $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$, *ist*

$$\lrcorner(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q}) = \sum \ _{I,J} < \ , v \ _{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_q} > (v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}).$$

(Hier wird uber alle Zerlegungen von $\{1, \ldots, p+q\}$ *in eine Menge* $I = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ *und eine Menge* $J = \{j_1 < \ldots < j_q\}$ *summiert.)*

4. *Wenn* $\quad \in V \ $, $x \in \bigwedge^r V$ *und* $y \in \bigwedge^s V$, *ist*

$$\lrcorner(x \wedge y) = (\quad 1)^s(\ \lrcorner x) \wedge y + x \wedge (\ \lrcorner y).$$

Die Operation $\llcorner$ wird dual deniert:

Denition *Die bilineare Abbildung* $\llcorner : \bigwedge^{p+q} V \quad \bigwedge^p V \to \bigwedge^q V$ *ist deniert durch*

$$< \ \llcorner x, y > \ = \ < \ , x \ \wedge y > .$$

Lemma 8.4.6 *Sei* $p + q = n = \dim V$, $\quad \in \bigwedge^p V \ $, $x \in \bigwedge^q V$, $m \in \bigwedge^n V$ *und* $\quad \in \bigwedge^n V \ $. *Wenn* $< \ , m > \ = 1$, *ist*

$$\lrcorner m = x \iff \quad = \ \llcorner x.$$

8.5 Die auere Algebra eines euklidischen Raumes

Sei V ein n–dimensionaler euklidischer Vektorraum. Jedes lineare Funktional hat die Form $x \mapsto (a, x)$ fur ein eindeutig bestimmtes $a \in V$. Wir konnen auf diese Weise $V \ $ mit V identizieren. Daraus ergibt sich auf naturliche Weise eine Identizierung von $\ \bigwedge^p V \ $ und $\bigwedge^p V$. Es ist dann fur $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p \in V$

$$< x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_p >= \det \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & \ldots & (x_1, y_p) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_p, y_1) & \ldots & (x_p, y_p) \end{pmatrix}.$$

Lemma 8.5.1 *Die* $\bigwedge^p V$ *mit der Bilinearform* $< \ , \ >$ *sind euklidische Vektorraume.*

Lemma 8.5.2 *Fur alle* $x \in \bigwedge^p$ *und* $\quad \in \bigwedge^{p+q}$ *ist* $x \lrcorner \quad = (\quad 1)^{pq} \quad \llcorner x$.

Lemma 8.5.3 *Eine* n*–Form* $\quad \in \bigwedge^n V \quad = \bigwedge^n V$ *ist genau dann normiert (im Sinn von Seite 38), wenn* $\| \quad \| = 1$.

Sei eine normierte n–Form $\quad$ festgehalten. Nach 8.3.7 werden $\bigwedge^p V$ und $\bigwedge^q V$ (wobei $p + q = n$) vermoge $x, y \mapsto (\ , x \quad \wedge y)$ zu einem dualen Paar. Es gibt also einen Vektorraumisomorphismus (die *Hodge–Abbildung*) $\overline{} : \bigwedge^p V \to \bigwedge^q V$, deniert durch

$$(\ , x \quad \wedge y) = (\overline{x}, y)$$

(fur alle $y \in \bigwedge^q V$). Anders ausgedruckt:

$$\overline{x} = \quad \llcorner x.$$

Satz 8.5.4

1. $^{-} = 1$
2. *Wenn* $\overline{x} = y$*, ist* $x = (\quad 1)^{pq}\overline{y}$.
3. $^{-}$ *respektiert die euklidische Bilinearform:* $(\bar{x}, \overline{x'}) = (x, x')$
4. *Wenn* $e_1, \ldots, e_n$ *eine Orthonormalbasis von* V *ist, fur die* $\quad (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$*, ist*

$$\overline{e_I} = \quad _{I,J} e_J,$$

wenn $I \cup J = \{1, \ldots n\}$.

Sei schlielich V ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum mit einer einer ausgezeichneten normierten 3–Form . (Bis auf Isomorphie ist das der $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbilinearform und der Standarddeterminantenform mit $\quad (e_1, e_2, e_3) = 1$ fur die kanonische Basis.)

Denition *Das Kreuzprodukt* $\quad : V \quad V \to V$ *ist deniert durch* $x \quad y = \overline{x \wedge y}$.

Fur den $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbilinearform und der Standarddeterminantenform stimmt das jetzt denierte Kreuzprodukt mit dem auf Seite 15 denierten Kreuzprodukt uberein. Es folgt, da unter der Wirkung aller $\quad \in \mathrm{Sl}_3(\mathbb{R})$ invariant bleibt, da also $\quad (x \quad y) = \quad (x) \quad\quad (y)$ fur alle $x, y \in \mathbb{R}^3$.

$x \quad y$ ist eindeutig bestimmt durch die Gultigkeit von

$$(x, y, z) = (x \quad y, z)$$

fur alle $z \in V$. Die Operationen deraueren Algebra von V lassen sich durch $(\ ,\ )$ und ausdrucken. Zum Beispiel ist

Lemma 8.5.5 $x \quad y = \overline{x} \llcorner y$.

Satz 8.5.6 *Fur das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & a \quad b & = & \quad b \quad a \\
(2) & (a \quad b, c) & = & \quad (a, b, c) \\
(3) & (a \quad b) \quad c & = & (a, c)b \quad (b, c)a \\
(4) & ((a \quad b), (c \quad d)) & = & (a, c)(b, d) \quad (a, d)(b, c)
\end{array}$$

Index