Induktion

1a) $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2 \quad | \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

JA: $n=1$: $1=1$ ✓ ; JV: $n=k$: $S_k=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2$

JBeh.: $n=k+1$: $S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=(k+1)^2$

JBew: $S_{k+1}=S_k+2k+1 \overset{!JV!}{=} k^2+2k+1=(k+1)^2$ ✓

b) analog a) JBew: $S_{k+1}=S_k+(k+1)^2 \overset{!JV!}{=} \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)$

! zusammenfassen !

$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$ (wie JBeh.)

d) $2^n>2n$; $n\geq 3$

JA: $n=3$: $8>6$ ✓ ; JV: $n=k$: $2^k>2k$ $(k\geq 3)$

JBeh: $2^{(k+1)}>2(k+1)=(2k+2)$

JBew: !JV! $2^k>2k \quad \| \cdot 2$

für $k\geq 3$

$2^{k+1}>4k=2k+2k>2k+2=2(k+1)$ ✓

fortlaufende Ungleichung

e) $2^n>n^2$; $n\geq 5$

JA: $n=5$: $32>25$ ✓ ; JV: $n=k$: $2^k>k^2$

JBeh: $n=k+1$: $2^{(k+1)}>(k+1)^2=(k^2+2k+1)$

JBew: !JV! $2^k>k^2 \quad \| \cdot 2$

$2^{(k+1)}>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=(k+1)^2$ ✓

Nebenrechnung: man zeigt: $k^2>2k+1$ indem man $y=x^2$ und $y=2x+1$ betrachtet; für $x>1+\sqrt{2}$ ist $x^2>2x+1$ also ab 3 ist $k^2>2k+1$

4) Ansatz für Linearkombination: $x\cdot a_3 + y a_2 + z a_1 = b$

x	y	z	
-1	1	2	1
1	-2	1	1
1	-3	4	3
-1	1	2	1
0	-1	3	2
0	-2	6	4

$\nearrow$

x	y	z	
-1	1	2	1
0	-1	3	2
0	0	0	0

$\rightarrow$ $\underline{z = \lambda}$

$\rightarrow$ $\underline{y = -2 + 3\lambda}$

$-x + (-2+3\lambda) + 2\lambda = 1$

$\underline{x = -3 + 5\lambda}$

$\Leftarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5\lambda \\ -2+3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Lösungsmannigfaltigkeit

---

5) a) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y = 23$

$9[x^2 + 2x] + 4[y^2 - 2y] = 23$

$9[(x+1)^2 - 1] + 4[(y-1)^2 - 1] = 23$

$9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36$

$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

Ellipse
MP $(-1, 1)$
x-Halbachse $= 2$
y-Halbachse $= 3$

b) $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$ (Hyperbel)

c) $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 0$
Punkt $(2; -1)$

d) $(x+2)^2 - 9(y-1)^2 = 0$ (3. binom. Formel)

$[x+2+3(y-1)][x+2-3(y-1)] = 0$ $\rightarrow$ zwei Geraden

e) $x - 3 = 4(y+1)^2$ Parabel

---

6) Achsenabschnittgleichung $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $\rightarrow$ $3x + 2y = 6$

Abstand $d = \frac{6}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$

7) Cramer-Regel

x_1	x_2	
2	1	1
3	2	0

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 4 - 3 = 1$; $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 2$; $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -3$

8)

x_1	x_2	x_3	
1	-2	1	0
2	1	1	7
1	-1	-1	λ

$\Rightarrow$

1	-2	1	0
0	5	-1	7
0	1	-2	λ

$\updownarrow$

x_1	x_2	x_3	
1	-2	1	0
0	1	-2	λ
0	0	9	$7-5\lambda$

$\nearrow$ $x_3 = \frac{7}{9} - \frac{5}{9}\lambda$

$x_2 = \frac{14}{9} - \frac{1}{9}\lambda$

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\lambda$