1) Es gibt einen Isomorphismus zwischen

$M = \{2^a \cdot 5^b \mid a, b \in \mathbb{Z}, \cdot\}$ und $G = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, \oplus\}$

$m_1 = 2^{a_1} 5^{b_1}$, $m_2 = 2^{a_2} 5^{b_2}$ $\qquad$ $g_1 = (a_1, b_1)$, $g_2 = (a_2, b_2)$

$m_1 \circ m_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 5^{b_1+b_2}$ $\qquad$ $g_1 \oplus g_2 = (a_1+a_2, b_1+b_2)$

neutrales: $e = 1 = 2^0 \cdot 5^0$ $\qquad$ $e: (0,0)$

Inverse $m_1^{-1} = 2^{-a_1} \cdot 5^{-b_1}$ $\qquad$ $g_1^{-1} = (-a_1; -b_1)$

usw.

2) $G_1 = \{\mathbb{Z}_6, +\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$; $G_2 = \{\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

G_1:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
ord	1	6	3	2	3	6

G_2:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
ord	1	3	6	3	6	2

$\bar{1}$ und $\bar{5}$ erzeugen G_1 $\qquad$ 3 und 5 erzeugen G_2

2 Isomorphismen:

$\updownarrow$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
	3	2	6	4	5	1
	3^1	3^2	3^3			

$\updownarrow$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
	5	4	6	2	3	1
	5^1	5^2	5^3			

5| 4.2| a) $x^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_5$ nicht lösbar; in $\mathbb{Z}_7$: $\{3, 4\}$

b) $x - 2y = -1$ $\quad$! eigentlich ! $\underline{\mathbb{Z}_5}$: $x + 3y = 4 \mid \cdot 3$ $\quad$ $3x + 4y = 2$ $\quad$ $3x + 4y = 2$

$\cancel{2x + y = 1}$ $\qquad$ $2x + y = 1 \downarrow +$ $\quad$ $\cancel{2x + y = 1} \mid +$ $\quad$ $\underline{0 = 3}$

$\mathbb{Z}_7$: $\cancel{x + 5y = 6 \mid \cdot 5}$ $\quad$ $\cancel{5x + 4y = 2}$ $\qquad$ $\underline{W!}$

$2x + y = 7$ $\quad$ $2x + y = 7 \mid +$ $\quad$ $5x + 4y = 2$ $\quad$ $y = 2$

$\cancel{5y = 3}$ $\quad$ $x = 3$

5.2. nicht isomorph, da Ordnungen nicht stimmen!

6 a) ggT = 15 $\qquad$ 6 b) ggT = $x + 4$

Zusatz: $G = \mathbb{Z}_9 \setminus \{0, 3, 6\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ ist multip. Gruppe

$\{1, 8\}$ ist Untergruppe von 8 erzeugt

$\{1, 4, 7\}$ " " von 4 oder 7 erzeugt

5 erzeugt (durch seine Potenzen) ganz G