8c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$

8d) $z_1=(-2+2\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{2})$ $\quad z_2=(-2-2\sqrt{2})+i(-3-2\sqrt{2})$

(Aufgaben 22. 10. alt)

Komplexe Zahlen:

1. Man berechne $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$ von:

   a) $z_1=1+i\sqrt{3},\ z_2=1-i$; b) $z_1=3+4i,\ z_2=3-4i$;

   c) $z_1=1+i,\ z_2=2+3i$.

2. Von der komplexen Zahl z bestimme man Real- und Imaginärteil:

   a) $z=\frac{3+2i}{1+i}$, b) $z=\frac{36+27i}{(2+i)^2-3+5i}$, c) $z=4e^{i\frac{5}{6}\pi}$, d) $\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{18}$ $= 2^{18}\, e^{3\pi i}$

3. Berechnen Sie den absoluten Betrag und das Argument der komplexen Zahlen, und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Form an:

   a) $z=1+i$, b) $z=\sqrt{3}+i$, c) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $=-1-i$

   $\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{2}{3}\pi$

4. Man stelle folgende Zahlen in trigonometrischer und in der Gestalt $x+iy$ dar:

   a) $(1-i)^6$, b) $e^{3\pi i}$, c) $e^{2-6\pi i}$, d) $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^6$, e) $(1-i)^{21}$. $-1024+1024\,I$

   $8i$ $\quad -864$

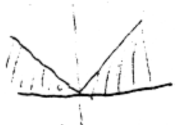
5. Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1=4i$ und $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ in exponentieller Form an! Berechnen Sie mit deren Hilfe: $\varphi=\frac{\pi}{3}$

   a) $\frac{z_2^4}{z_1}$, b) $(1-i)\frac{\bar{z}_1^3}{z_2^3}$.

6 a) 

6. Für welche Punkte $z=x+iy$ der Gaußschen Zahlenebene gilt:

   a) $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$, b) $0<\sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z)<|z|$, c) $|z+2-i|\geq 4$, d) $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=1$. $\rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

6b) 

7. Bestimmen Sie alle verschiedenen Werte $w_j,\ j=0,1,...,(n-1)$, die sich für $\sqrt[n]{z}$ ergeben!

   a) $z=\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$, b) $z=\sqrt[3]{27i}$.

6c) $(x+2)^2+(y-1)^2\geq 16$

8. Bestimmen Sie alle verschiedenen Lösungen der Gleichung

   a) $z^2=5+12i$, b) $z^3=8i$, c) $z^4=-1$, d) $z^2+(4+6i)\,z=5+4i$.

e) $z^2-(1+2i)z+i-3=0$

$\left[z-\left(\frac{1}{2}+i\right)\right]^2+\frac{3}{4}-i+i-3=0$

$(2+i)$, $(-1+i)$

2a) $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ b) $(3-4i)$ c) $(-2\sqrt{3}+2i)$ d) -262144

7a) $(\sqrt{3}+i)$, $(1-\sqrt{3}i)$, $(-\sqrt{3}-i)$, $(-1+\sqrt{3}i)$ | b) $\left(+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)$, $(-3i)$

8a) $(3+2i)$, $(-3-2i)$ | 8b) $-2i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$, $-2i\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$, $-2i$

$(\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i)$

b.w.

(Lösungen 22.10.-Woche alt)

(ohne Gewähr)

8c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$

2a) $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ b) $(3-4i)$ c) $(-2\sqrt{3}+2i)$ d) -262144

3a) $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ b) $r=2$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ c) $r=1$, $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ d) $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$

$z=-1-i$

4a) $r=8$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$
$z=8i$

b) $z=-1$
$r=1$, $\varphi=\pi$

c) $z=e^2$
$r=e^2$, $\varphi=0$

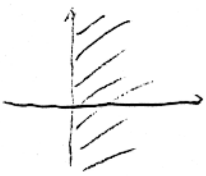
d) $z=-864$
$r=864$, $\varphi=\pi$

e) $r=1024\sqrt{2}$
$\varphi=\frac{3}{4}\pi$
$z=-1024+1024i$

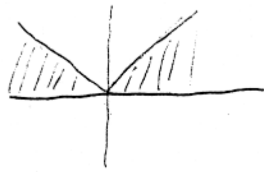
5a) $z=-8\sqrt{3}+8i$
$r=16$
$\varphi=\frac{5}{6}\pi$

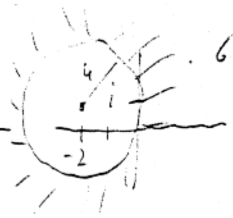
b) $8\sqrt{2}\,e^{\frac{23}{12}\pi i}$ (?)

6a)



6b)





6c) $\frac{1}{x+yi}+\frac{1}{x-yi}=1$

$\to (x-1)^2+y^2=1$

Kreis $r=1$, MP$(1,0)$

7a) $r=16$, $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ | $(\sqrt{3}+i)$, $(1-\sqrt{3}i)$, $(-\sqrt{3}-i)$, $(-1+\sqrt{3}i)$

b) $r=3$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ | $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)$, $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)$, $(-3i)$

8a) $(3+2i)$, $(-3-2i)$

b) $(\sqrt{3}+i)$, $(-\sqrt{3}+i)$, $-2i$

d) $[(2\sqrt{2}-2)+(2\sqrt{2}-3)i]$, $[(-2\sqrt{2}-2)+(-2\sqrt{2}-3)i]$

c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$ $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$ $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$ ← (siehe oben ↑)