Lineare Algebra für Informatiker, Wintersemester

1. Lösen Sie folgende Ungleichungen im angegebenen Bereich:

   a) $|x-3| \geq |x+2|$, $\quad x \in \mathbb{R}$

   b) $x^2 + x - 6 < 0$, $\quad x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$

   c) $-2 \leq \frac{x^2+5x}{7+2x} < 1$, $\quad x \in \mathbb{R}$

   d) $|x| \cdot |y| > 1$, $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

   e) $(y-2x)(y-\frac{x}{2}) \leq 0$, $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in \mathbb{N}^2$

   f*) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 < 0$, $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \in \mathbb{Z}^2$

2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n},\ n \geq 1$

   b) $\sum\limits_{\mu=1}^{n} \frac{1}{n+\mu} > \frac{13}{24},\ n \geq 2$

   c) $\prod\limits_{\nu=1}^{n} \frac{2\nu-1}{2\nu} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \geq 1$

   d*) $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)! > [(n+1)!]^n,\ n \geq 2$

3. Welche Punkte der Gaußschen Zahlenebene genügen den folgenden Gleichungen/Ungleichungen? ($z \in \mathbb{C}$)

   a) $|z-1| < 1, \quad |z-1| > 1$

   b) $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$

   c) $|z-1| + |z+1| = 4$

   d) $|z| + Re(z) = 1$

   e) $|z| \leq |\frac{z}{2}| + 1$

   f) $z^2 - (1+2i)z + i - 3 = 0$

   g) Für welches $k \in \mathbb{C}$ hat $z^2 - (6+2i)\ z + k = 0$ eine Doppellösung?

   h*) $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ und $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$