Lineare Algebra für Informatiker, Wintersemester

1. Gegeben seien die komplexen Zahlen
   $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 3(cos\ 240^o + i\ sin\ 240^o),\ z_3 = e^{1,6i}$

   a) Wandeln Sie jeweils in die beiden anderen Darstellungen um!

   b) Für $k = 1, 2, 3$ berechne man $r_k = |z_k|,\ \emptyset_k = Arc(z_k),\ \overline{z_k}$.

   c) Berechnen Sie $\sqrt[6]{z_2},\ z_1 + z_2,\ z_1 \cdot \overline{z}_2,\ z_1^2 \cdot \sqrt{z_3}$!

2. Zeigen Sie, daß für $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, gilt: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|$.

3. Zeigen Sie, daß das Produkt zweier regulärer (2,2)-Matrizen wieder eine reguläre (2,2)-Matrix ergibt.

4. Bestimmen Sie die Inverse einer regulären (2,2)-Matrix!

5. Untersuchen Sie die Bewegungsgruppe des regelmäßigen 3 (4)-Ecks!

6. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für $\mathbb{Z}_4(+)$ und $\mathbb{Z}_4(\cdot)$ an!

7. Gegeben seien

   a) die Funktionen:
   $f_o(x) = x,\ f_1(x) = \frac{1}{x},\ f_2(x) = \frac{-1}{x},\ f_3(x) = -x$

   b) die Permutationen (in Zyklenschreibweise):
   $p_o = (1),\ p_1 = (12)(34),\ p_2 = (13)(24),\ p_3 = (14)(23)$
   mit der jeweils üblichen Verknüpfung: $\alpha_i \circ \alpha_j = \alpha_i(\alpha_j)$.

   – Geben Sie die Verknüpfungstabellen an!
   – Handelt es sich jeweils um eine (abelsche) Gruppe?

8. Wann heißen zwei Gruppen G_1, G_2 homomorph (isomorph)?

9*. Geben Sie Untergruppen der $\mathfrak{S}_4$ an.

10. Gegeben sei die Menge $A = \{a, b, c\}$ mit den Elementen a, b, c. Bilden Sie zunächst die Potenzmenge $P = P(A)$ von A. Zwei Elemente $p', p'' \in P$ werden auf folgende Weise verknüpft:
    $p' \circ p'' = (p' \cup p'') - (p' \cap p'')$
    (symmetrische Differenz zweier Mengen).
    Handelt es sich bei P mit Verknüpfung $\circ$ um eine Gruppe?

11*. Ersetzen Sie in Aufgabe 10 die Menge A durch die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ der natürlichen Zahlen.