Lineare Algebra für Informatiker, Wintersemester

1. Zeigen Sie, daß die Menge $M = \{2^a \cdot 5^b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe ist.

2. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}, \cdot)$ an!

3. Zeigen Sie, daß die Menge $M_1 = \{n \cdot z | z \in \mathbb{Z}\}$ und $M_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) | a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation je einen Ring bilden.

4.1 Ist $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ein Körper?

4.2 Lösen Sie in $\mathbb{Z}_5$ bzw. $\mathbb{Z}_7$:

   a) $x^2 = 2$

   b) $x - 2y = -1$
   $2x + y = 1$

5.1 Zeigen Sie:
Für alle $x \in \mathbb{Z}_6$ gilt $x^3 - x = 0$.

5.2 Sind $(\mathbb{Z}_6, +)$ und S_3 isomorph?

5.3 Welchen Rest läßt 12345^{67890} bei Division durch 8?

6. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von

   a) 840 und $1275 \in \mathbb{Z}$,

   b) $2x^4 - 23x^2 - 144$ und $x^3 + 4x^2 - 6x - 24 \in \mathbb{Q}[x]$.

7. Zeigen Sie, daß $x - 4$ ein Teiler von $f = 2x^4 - 23x^2 - 144$ ist. Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die anderen Faktoren von f.

8. Gegeben seien die Polynome $p_1(x) = x^5 - 1$ und $p_2(x) = x^3 - 1 \in \mathbb{R}[x]$.
Man bestimme
$p_1 \circ p_2(x) := p_1(p_2(x))$ und $p_2 \circ p_1(x)$.

9. Zeigen Sie, daß Matrix $\mathfrak{a} = \left(\begin{smallmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ der Gleichung $\mathfrak{X}^2 + 3\mathfrak{X} - 4\mathfrak{E} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ genügt.