Lineare Algebra für Informatiker, Wintersemester

1. Man berechne folgende Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Lösen Sie

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 5-x \end{vmatrix} = 0$$

3. Berechnen Sie für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

   Verallgemeinern Sie das Ergebnis!

4. Welche der folgenden Matrizen haben eine Inverse? Geben Sie diese an!

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

5. Mittels geeignetem Ansatz berechne man für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   die inverse Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$.

6. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem lösbar!

$$6.1 \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$6.2 \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Zeigen Sie, daß die Vektoren $\mathfrak{a} = (1,1,1,1)^T$, $\mathfrak{b} = (1,1,0,0)^T$, $\mathfrak{c} = (1,0,1,0)^T$ und $\mathfrak{d} = (1,0,0,1)^T$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis nach dem Verfahren von Schmidt!

Weitere Übungsaufgaben (mit Lösungen) in: MINÖL: Ü3