Lineare Algebra für Informatiker, Wintersemester

1. Gegeben seien der Unterraum
$U = \{\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathfrak{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
des $V = \mathbb{R}^3$ und ein Punkt $A(1,1,0)$.

   1.1 Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U!

   1.2 Ermitteln Sie den Lotraum $U^\perp$ von U bezüglich V!

   1.3 Berechnen Sie die Projektion $proj(\mathfrak{a}, U)$ des Vektors $\mathfrak{a} = (1,1,0)^\top$ auf U!

   1.4 Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes von A auf U!

   1.5 Welchen Abstand $d(A,U)$ hat A von U?

2. Gegeben seien der Unterraum $U = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, welcher von den Vektoren $\mathfrak{a} = (1,0,1,1)^\top$ und $\mathfrak{b} = (1,1,0,0)^\top$ aufgespannt wird, und der Punkt $P = (0,1,0,2)^\top$.

   2.1 Berechnen Sie $U^\perp$!

   2.2 Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes von P auf U!

   2.3 Welchen Abstand hat P von U?

3. Gegeben seien im $\mathbb{R}^2$ der Punkt $A(7,-1)$ und die Geraden
$g_k \equiv \mathfrak{x} = k\binom{1}{0} + \lambda\binom{1}{2}, \quad k \in \{0,1\}$.

   3.1 Berechnen Sie die Geraden g_k' mit $A \in g_k'$ und $g_k' \perp g$!

   3.2 A_k sei der bei Spiegelung von A an g_k gefundene Punkt. Berechnen Sie die Koordinaten von A_k für $k = \{0,1\}$.

   3.3* Die Punkte $P, P_k \in \mathbb{R}^2$ seien Spiegelpunkte bezüglich der Geraden g_k und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_k$ die entsprechenden Ortsvektoren.

      3.3.1 Bestimmen Sie zunächst Spiegelmatrix $S_0 = S(g_0)$ derart, daß $\mathfrak{p}_0 = S_0 \cdot \mathfrak{p}$ gilt!

      3.3.2 Wie kann man mittels S_0 den Vektor $\mathfrak{p}_1$ berechnen?

4. Im $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Punkte $A \quad (5,-1)$ und $B \quad (2,1)$ gegeben.

   4.1 Geben Sie eine Drehmatrix D an, welche einen beliebigen Punkt P (mit Ortsvektor $\mathfrak{p}$) um den Mittelpunkt $M(0,0)$ um $\varphi = 60^o$ in den Punkt $P(M,\varphi)$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{p}(M,\varphi) = D \cdot \mathfrak{p}$ überführt!

   4.2 Berechnen Sie $\mathfrak{a}(B, \varphi = 60^o)$ und $\mathfrak{b}(A, \varphi = 45^o)$!