Lineare Algebra für Informatiker, Wintersemester

1. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

   a) mittels Gauss-Verfahren,

   b) nach geeigneter Umformung

      b.1) mittels Cramer'scher Regel bzw.

      b.2) über eine Matrizengleichung!

2. Von den folgenden Matrizen bestimme man die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren!

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},\ \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Formen Sie die folgenden Gleichungen so um, daß Mittelpunkte und Radien bzw. Halbachsen erkennbar sind und skizzieren Sie diese Kurven:

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$$

$$25x^2 + 150x + 49y^2 - 196y - 804 = 0$$

$$100x^2 - 49y^2 - 1000x - 392y = 3184$$

4. Überprüfen Sie, ob eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel oder ein Geradenpaar (zerfallende Kurve zweiter Ordnung) vorliegt.

$$F(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - 5 = 0$$

$$F(x,y) = 2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 4y^2 - 1 = 0$$

$$F(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 6y + 5 = 0$$

$$F(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$$

$$F(x,y) = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$$

5. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 6x_1 + ax_2 &= b \end{aligned} \qquad (*)$$

   Geben Sie Lösungen von $(*)$ für $(a,b) \in \{(3;9), (3,0003;9,0003), (3,0003;9), (3,0003;9,001)\}$.

6. Durch

$$y_1 = 3x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 + 4x_2$$
$$y_3 = x_1 + 5x_2$$

wird eine lineare Abbildung $\mathfrak{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ beschrieben.

6.1 Von $g \equiv x_1 + x_2 = 0$ $(g \subseteq \mathbb{R}^2)$ bestimme man das Bild $\mathfrak{S}(g) \subseteq \mathbb{R}^3$.

6.2 Von $\varepsilon \equiv y_1 - y_2 + y_3 = 2$ $(\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^3)$ bestimme man das Urbild $\mathfrak{S}^{-1}(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$.