Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. rer.nat. Hans Babovsky

Vorname: Name: Matr.-Nr:

Matrikel: M Gruppe:

1	2	3	4	$\sum$	Note
11	8	14	17	50	

1. Relationen

a) Auf der Menge G der Geraden in $\boldsymbol{R}^2$ sei die Relation R definiert durch
$g_1 \, R \, g_2 \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$ (d. h. "g_1 parallel zu g_2").
Untersuchen Sie R auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität (ohne Begründung). Ist R eine Ordnungsrelation?

b) Auf der Menge V der Vektoren im $\boldsymbol{R}^3$ sei eine Relation definiert durch
$\vec{v_1} \, S \, \vec{v_2} \Leftrightarrow \vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ (d. h. "$\vec{v_1}$ senkrecht auf $\vec{v_2}$").
Untersuchen Sie S auf Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität (ohne Begründung). Ist S eine Äquivalenzrelation?

c) Auf der Menge $M = \{b, \beta, B, d, \delta\}$ sei die Relation R definiert durch
$R = \{(d,d),(d,\beta),(d,B),(B,B),(B,\delta),(\beta,\beta),(\beta,b),(\delta,\delta),(\delta,b),(b,b)\}$.

(i) Stellen Sie R graphisch dar.

(ii) Überprüfen Sie R auf Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität.

(iii) Ergänzen Sie R durch möglichst wenige Paare zu einer Ordnungsrelation R'. Ist R' eine Totalordnung?

(iv) Wenn R durch möglichst wenige Paare zu einer Äquivalenzrelation $\tilde{R}$ ergänzt wird, wieviele Äquivalenzklassen hat dann $\tilde{R}$?

2. Relationen/Funktionen

Es seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,2,4\}$ sowie $M = A \times B$.

Die Funktion $f\colon M \to \boldsymbol{N}$ sei gegeben durch $f(z) = a + b$ für $z = (a,b)$.

a) Bestimmen Sie den Wertebereich $f(M)$ von f und untersuchen Sie f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Entsprechend der Bemerkung 2.19 b) der Vorlesung sei auf M eine Äquivalenzrelation R definiert durch $x \, R \, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
Bestimmen Sie die Menge M/R der Äquivalenzklassen von R.

c) Bestimmen Sie die in Bemerkung 2.19 b) definierte Abbildung
$f_R : M/R \to f(M)$ sowie $(f_R)^{-1}$.

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. rer.nat. Hans Babovsky

3. **Induktion/Rekursion**

Für $n \in N$ sei M_n die Menge der Paare $(i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{0,\dots,n\}$ mit der Eigenschaft $i < j-2$. a_n sei die Anzahl der Elemente von M_n.

a) Bestimmen Sie M_n und a_n für $n = 0,1,2,3,4,5$.

b) Bestimmen Sie $M_{n+1} - M_n$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe b), dass a_n für $n > 2$ die folgende Rekursionsformel erfüllt
$a_{n+1} = a_n + (n-1)$.

d) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 5$ gilt
$a_n \leq \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2 - 2$

4. **Logik**

a) Gegeben sei die Aussagenmenge

$$A_1 \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R),$$

$$A_2 \equiv ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R),$$

$$A_3 \equiv \neg Q \vee ((P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \wedge R))),$$

$$A_4 \equiv (P \vee Q) \Rightarrow \neg(Q \Rightarrow R)$$

und $\Sigma := \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ zu den Aussagevariablen P, Q, R.

(i) Stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf für die Aussagen A_1, A_2, A_3, A_4.
Welche der Aussagen sind Tautologien, welche sind widerspruchsvoll?

(ii) Beschreiben Sie die Menge aller Realisierungen mit Hilfe einer kanonischen disjunktiven Normalform.

(iii) Welche der folgenden Aussagen sind Folgerungen aus Σ?
$N_1 \equiv (P \Leftrightarrow Q) \vee \neg R$,
$N_2 \equiv \neg Q \Leftrightarrow R$,
$N_3 \equiv \neg P$.

b) S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 seien Aussagen. Stellen Sie die Beziehungen

$$S_1 \Rightarrow S_5,\ S_3 \Rightarrow S_5,\ S_4 \Rightarrow S_2,\ S_4 \Rightarrow S_3$$

graphisch dar und bestimmen Sie hieraus alle Realisierungen von

$$\tilde{\Sigma} := \{S_2, \neg S_5, S_1 \Rightarrow S_5, S_3 \Rightarrow S_5, S_4 \Rightarrow S_2, S_4 \Rightarrow S_3\}.$$