Grundlagen der Mengenlehre

DE MORGANsche Gesetze:

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(B-C)$$
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

Absorbtionsgesetze (Ab):

$$A\cup(A\cap B)=A$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

Indizierte Mengen: $\{B_i\}_{i\in I}$ sei indizierte Menge.
Dann gilt:

$$A-\bigcap_{i\in I}B_i=\bigcup_{i\in I}(A-B_i)$$
$$A-\bigcup_{i\in I}B_i=\bigcap_{i\in I}(A-B_i)$$
$$\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)'=\bigcup_{i\in I}B_i'$$
$$\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)'=\bigcap_{i\in I}B_i'$$

Potenzmengen:

$$\{\emptyset,A\}\subseteq\mathcal{P}(A)$$
$$A\subseteq B\Leftrightarrow\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$$
$$\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$$
$$\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cap B)$$

Boolsche Algebra: allg.: $\mathcal{M}=(M,\nu,\eta,\oplus,\otimes,')$ ($\nu\ldots$Nullelement; $\eta\ldots$Einselement)
spez.: $\mathcal{M}=(M,0,1,\oplus,\otimes,')$

Bedingungen:

I. $K(\oplus),K(\otimes),A(\oplus),A(\otimes)$

II. $D(\oplus,\otimes),D(\otimes,\oplus),Ab(\oplus,\otimes),Ab(\otimes,\oplus)$

III. $\forall a\in M:$
$$a\oplus 0=a$$
$$a\oplus 1=1$$
$$a\otimes 0=0$$
$$a\otimes 1=1$$

IV. $\forall a\in M:$
$$a\oplus a'=1$$
$$a\otimes a'=0$$

Geordnete Paare und kartesisches Produkt (Kreuzprodukt):

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$(a,b,c)=(a,(b,c))$$

$$A=\{a,b\}\qquad B=\{c,d\}$$
$$A\times B=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$$

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$
$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$
$$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$$
$$(A\times B=B\times A)\Leftrightarrow(A=B);\text{ für }A,B\neq\emptyset$$
$$A_1\times B_1\in\mathcal{P}(A\times B);\text{ für }A_1\in\mathcal{P}(A)\wedge B_1\in\mathcal{P}(B)$$
$$\emptyset\times A=\emptyset$$

Relationen und Funktionen

$xRy \to (x,y) \in R, R \subseteq A \times B$

Relation auf A: $R \subseteq A \times A$

Beispiel: $A = \{a,b,c\}$

R ist **reflexiv**:	$xRx, \forall x \in A$	$R = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
irreflexif:	$x\cancel{R}x, \forall x \in A$	$R = \{(a,b),(a,c)\}$
symmetrisch:	$xRy \Rightarrow yRx, \forall x,y \in A$	$R = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$
antisymmetrisch:	$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y, \forall x,y \in A$	$R = \{(a,b),(c,a),(b,b)\}$
transitiv:	$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	$R = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$

Spezielle Relationen $(R \subseteq A \times A)$:

Ordnungsrelation: R ist *reflexiv*, *antisymmetrisch* und *transitiv*.
Totalordnung: Ordnung und $(\forall x, y \in A)(xRy \vee yRx)$
Äquivalenzrelation: R ist *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv*.
Partition Π von M: (Zerlegung von M in Blöcke)

$\Pi = \{A_i\}_{i \in I}$ von nichtleeren Teilmengen von M mit den Eigenschaften :

$\bigcup_{i \in I} A_i = M$ (keine „Lücken“ zwischen den Teilmengen)

$A_i \cap A_j = \emptyset$, falls $i \neq j$

Äquivalenzklassen: $[m]_R := \{x \in M \mid xRm\}$, für $m \in M$

$M/R := \{[m]_R \mid m \in M\}$ … Menge aller Äquivalenzklassen

Ist R eine Äquivalenzrelation auf M, so ist M/R eine Partition von M.

Beispiel:

$M = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3),(3,1)\}$ ist eine Äquivalenzrelation

$[1]_R = \{1,3\},\ [2]_R = \{2\},\ [3]_R = \{1,3\}$

Funktionen $(f : A \to B)$:

surjektiv: $f(A) = B$, d.h. es werden **alle** Elemente von B als Funktionswerte getroffen.
injektiv: alle Elemente von B werden als Funktionswert **maximal einmal** getroffen.
bijektiv: *surjektiv* und *injektiv*.

Zusammengesetzte und inverse Funktionen (f, g, h):

$g \circ f(x) = g(f(x))$

$(g \circ f) \circ h(x) = g(f(h(x)))$

inverse f^{-1}:

$f : A \to B$ (f ist bijektiv)

$f^{-1} : B \to A$

$f \circ f^{-1} : B \to B$ $\left(B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B\right)$

$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

Identische Abbildung id_X:

$id_A : A \to A$

$f : A \to B$ (f ist bijektiv)

$f \circ f^{-1} = id_B$

$id_B \circ f = f = f \circ id_A$

Folgerung (f ist bijektiv):

$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

$f : A \to B, g : B \to C; f, g$ bijektiv

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Kardinalzahlen

$f : A \to B$

$|A|, |B|$ Anzahl der Elemente der Mengen A und B (auch $\#A$, $\#B$).

$|A| = |B| \Leftrightarrow f$ bijektiv.

Äquipotenz: $A \approx B \Leftrightarrow |A| = |B|$

$\approx$ ist eine *Äquivalenzrelation*.

$(\mathrm{N}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\})$

A heißt **endlich**: $\exists n \in \mathrm{N} \mid A \approx \mathrm{N}_n$ (Formal: $|A| = n$)

unendlich: A ist nicht endlich

abzählbar ∞: $A \approx \mathrm{N}$ (Formal: $|A| = |\mathrm{N}|$)

überabzählbar ∞: $|A| = \infty$ und $|A| \neq |\mathrm{N}|$

Satz von Cantor:

Für die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A gilt stehts:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < \ldots$$

Logik

x, y seien Boolsche Variablen, $U = \{0, 1\}$
$xy := x \wedge y$
$\overline{x} := \neg x$

	Entspricht (RO)
$x \Rightarrow y := \overline{x} \vee y$	$x \to y$ (Implikation)
$x \Leftrightarrow y := xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$	$x \sim y$ (Äquivalenz)
$x \,\text{XOR}\, y := x\overline{y} \vee \overline{x}y$	$x \nsim y = \overline{x \sim y}$ (Antivalenz)

$\neg$ bindet stärker als $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
$\wedge, \vee$ bindet stärker als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$
$\wedge$ bindet stärker als $\vee$

$p(x_1 \ldots x_n)$ und $q(x_1 \ldots x_n)$ sind n-stellige Boolsche Ausdrücke:

p heißt **Tautologie**: $p(x_1 \ldots x_n) = 1, \forall (x_1 \ldots x_n) \in U^n$

Widerspruchsvoll: $p(x_1 \ldots x_n) = 0, \forall (x_1 \ldots x_n) \in U^n$

Logisch äquivalent: $p(x_1 \ldots x_n) = q(x_1 \ldots x_n), \forall (x_1 \ldots x_n) \in U^n$
Schreibweise: $p \equiv q$
$p \equiv q$, genau dann wenn $p \Leftrightarrow q$ Tautologie ist.
$\equiv$ ist auf der Menge der Bool. Ausdrücke (A_n) eine Äquivalenzrelation.
$\left| A_n |_{\equiv} \right| = \left| \mathcal{P}(V) \right| = 2^{|V|} = 2^{2n}$

Absoptionsgesetze: $p(p \vee q) \equiv p, \quad p \vee pq \equiv p$

Distributivgesetze: $p(q \vee r) \equiv (pq) \vee (pr), \quad p \vee qr \equiv (p \vee q)(p \vee r)$

DE MORGAN Gesetze: $\overline{pq} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \equiv \overline{p}\,\overline{q}$

Literale: x und $\overline{x}$, $x \in A_n$ (Boolsche Variable)

Atom: $p(x_1 \ldots x_n) = p_1(x_1) \wedge p_2(x_2) \ldots \wedge p_n(x_n)$, p_i sind Literale

DNF: $q(x_1 \ldots x_n) = p^{(1)}(x_1 \ldots x_n) \vee \ldots \vee p^{(n)}(x_1 \ldots x_n)$, $p^{(i)}$ sind Atome

Folgerungen:

Δ und Σ seien Aussagenmengen
Ded(Σ) ist die Menge aller Folgerungen aus Σ.

$\Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow \text{Ded}(\Delta) \subseteq \text{Ded}(\Sigma)$

Außerdem gilt: $\text{Ded}(\text{Ded}(\Delta)) = \text{Ded}(\Delta) \supseteq \Delta$

Beispiel:

$\Sigma = \{p, q, r\}$

x_1	x_2	p	q	r	Σ	f
0	0	**0**	1	1	**0**	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	**0**	**0**	0
1	1	1	1	1	1	1

f ist eine mögliche Folgerung von Σ.

Mathematisches Beweisen (siehe auch Skript **5.5**)

Regel des modus ponens

$\{S_1, S_1 \Rightarrow S_2\} \models S_2$ „Ist $S_1 \Rightarrow S_2$ wahr, so folgt aus der Wahrheit von S_1 die Wahrheit von S_2."

Direkter Beweis

Um die Wahrheit von S_2 zu beweisen, genügt es die Gültigkeit von S_1 und $S_1 \Rightarrow S_2$ zu zeigen.

Indirekter Beweis

$P \Rightarrow Q \equiv \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Damit gilt $\{\mathrm{P}, \overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}\} \models Q$. Die Gültigkeit von Q folgt damit aus der Gültigkeit von P und $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Verkettete Beweise

Kettenbeweis

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ sei eine Folge von Aussagen. Dann gilt $\{P_1, P_1 \Rightarrow P_2, P_2 \Rightarrow P_3, \ldots, P_{n-1} \Rightarrow P_n\} \models P_i$ für $i = 1, 2, \ldots$

Ringbeweis

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ seien Aussagen; wahr seien $P_i \Rightarrow P_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n - 1$ sowie $P_n \Rightarrow P_1$. Dann gilt:

(I). Ist P_i wahr für ein $i \in \{1 \ldots n\}$, so sind alle Aussagen wahr;
(II). Alle Aussagen sind logisch äquivalent.